

2. WO IST DAS ELEKTRON?

«DENN WENN MAN NICHT ZUNÄCHST ÜBER DIE QUANTENTHEORIE ENTSETZT IST, KANN MAN SIE DOCH UNMÖGLICH VERSTANDEN HABEN», SAGTE DER ATOMPHYSIKER NIELS BOHR.

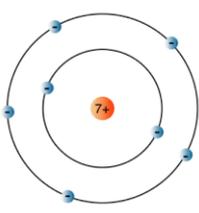
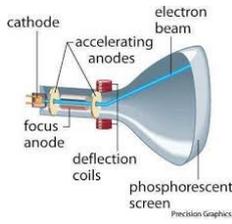
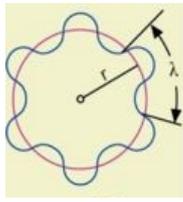
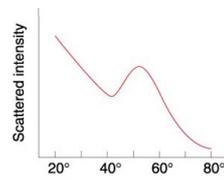
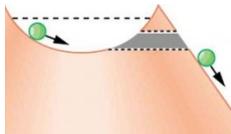
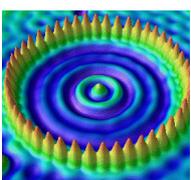
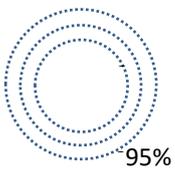
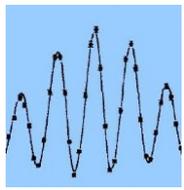
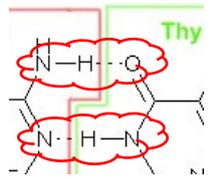
Wir gehen nicht von der Frage aus «Was ist das Elektron?», wie beim Licht, denn wir vermuten bereits, dass auch das Elektron ein Quantenobjekt ist. Wir stellen uns vielmehr die Aufgabe, die neue Mechanik zu verstehen, der das Elektron gehorcht. Diese Quantenmechanik, gilt nicht nur für Elektronen, sondern auch für Neutronen, Atome usw. Wir wählen den **Einstein - Bohr - de Broglie - Schrödinger - Born - Weg** für den Zugang, denn so können wir auf dem uns bekannten Prinzip der Dualität aufbauen.

Unser Weg in Richtung Quantenmechanik erfordert Schritte in zwei Richtungen:

Abstraktion: Elektronen usw. zeigen auch Wellenaspekt, sind also nicht gewöhnliche Teilchen.

Wahrscheinlichkeit: Alle Quantenobjekte zeigen zufälliges Verhalten, wie Spielwürfel.

Menschen, Dinge und Diagramme markieren die drei verschiedenen Etappen des geplanten Wegs:

Etappen	Vorstellung vom Elektron	gebundenes Objekt 'Elektron' im Atom	freies Objekt 'Elektron' im Vakuum	Objekt 'Elektron' an einer Potentialschwelle
halb-klassische  Mechanik	Ein Elektron ist 0 nur körnig ; es ist ein klassisches Teilchen. 			
Wellenmechanik I 	Elektron 1 mit Welle ; Welle begleitet das Teilchen, in 1 Dimension 			
Wellenmechanik II 	2 Etwas ist wellig ; ψ -Welle in 3 Dimensionen 			
Quantenmechanik 	wellig & körnig 3 «zufällig» Wahrscheinlichkeitsverteilung $\psi^2 \leftrightarrow$ Orbital 			
Überraschungen im Quantenland	Ein Thema ist die Frage nach dem Wirken des Zufalls. Ein anderes ist Schrödingers Katze ...			

2.1 Um 1920 dachte man sich die Materie körnig und ihre Energie quantisiert.

0 Start mit der Einsicht: Bohrs Atommodell hat Fehler.

2.1.1 Eintauchen in die Welt der Atome

Gibt es überhaupt Atome? – Noch um 1900 zweifelten bedeutende Physiker wie Ernst Mach an der Existenz der Atome. «*Hamm S' schon eins g'sehn?*», fragte er mit Wiener Charme. Obwohl die Chemie schon längst mit den Atomen H und O als kleinste Einheiten für die Bildung von H₂O arbeitete, wusste man damals wenig über Grösse und Masse der Atome. Das änderte sich, als Einstein 1905 die Brownsche Bewegung als Stösse vieler H₂O-Moleküle gegen die Pollenkörner mathematisch analysierte (→ 1.3). Nun konnte die Avogadro-Zahl (6·10²³ Teilchen pro Mol) mit physikalischen Methoden zehnmal genauer bestimmt werden. Das überzeugte auch die letzten Zweifler vom Atomismus und der Teilchennatur der Materie.



SCHUTZ VOR UV-QUANTEN

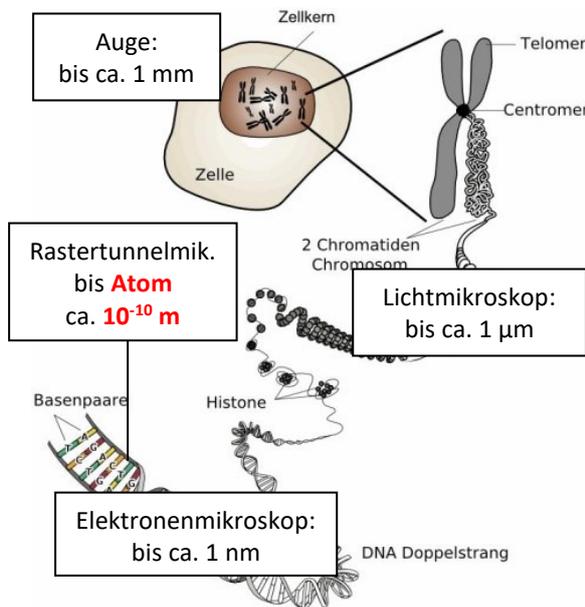


FIG. 2.1a: EINTAUCHEN IN ATOMARE DIMENSIONEN

In Figur 2.1a dringt man im eigenen Körper stufenweise in die atomare Grössenordnung ein. Der Weg führt von den Organen, die man mit blosssem Auge sehen kann, zu den Zellen, die unter dem **Lichtmikroskop** zu erkennen sind, wenn sie grösser sind als die Lichtwellenlänge. Unter dem **Elektronenmikroskop** tauchen noch feinere Strukturen auf, die bestimmte biologische Funktionen erfüllen. Nach vielen Zwischenstufen und noch stärkerer Vergrösserung erscheinen die Basenpaare der Erbsubstanz DNA. Mit dem **Rastertunnelmikroskop** (→ 2.4.2) kann man sogar einzelne Atome abbilden.

In der Tabelle 2.1b sind die Bausteine der Lebewesen in Zehner-Potenzen nach absteigender Grösse zusammengestellt. Zentral sind die aus (körnigen) Elektronen und dem Kern mit den (körnigen) Protonen und Neutronen aufgebauten Atome. Um 1920 dachte man sich die Materie körnig. – Das stimmt auch heute noch; es ist aber nur die halbe Wahrheit.

Objekt	Lebewesen	Zelle	Zellkern	DNA	Atom	Atomkern
Grössenord.	1 m	1 mm	1 µm	1 nm	10 ⁻¹⁰ m = 100 pm	1 fm
,sehen' mit	Radar	Auge	Lichtmikroskop	Elektronenmik.	Rastertunnelmik.	Beschleuniger

TABELLE 2.1b: GRÖSSENORDNUNGEN IN DER STRUKTUR DER BELEBTEN UND UNBELEBTEN MATERIE

Reflexion: Atome sind nur etwa 10⁻¹⁰ m = 1 Angström gross, aber nicht a-tomos, unteilbar. – Welche Vorstellungen machen Sie sich zum Atom? Wie steht es mit Masse und Ladung seiner Teile? Braucht es für die Atome eine neue Mechanik?

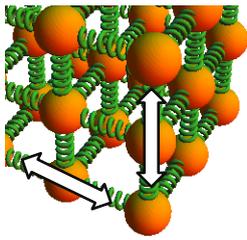
2.1.2 Energiequanten bei Bewegungen ganzer Atome

(Ergänzung)

Die Quantenphysik der Materie begann unscheinbar. Albert Einstein konnte 1906 ein merkwürdiges Verhalten des Diamanten erklären: Während bei den meisten Stoffen die spezifische Wärme konstant ist, z. B. 4.2 kJ/kg·K beim Wasser, nimmt sie beim Diamanten von 2.3 kJ/kg·K bei +1000°C auf 0.15 kJ/kg·K bei -100°C ab. – Wieso erhöht gleichviel zugeführte Wärme die thermische Bewegung der Bestandteile eines Stoffs, also hier die Grösse der Schwingungen der C-Atome im Diamantgitter, bei tiefen Temperaturen stärker als bei hohen Temperaturen?



Sehr vereinfacht könnte man sagen, dass bei tiefen Temperaturen die Zufuhr von $\Delta E = 1 \cdot hf$ die Gesamtenergie merklich erhöht, z. B. von $4 hf$ auf $5 hf$. Das entspricht einer starken Unordnungs- und



C-ATOME IM
MODELL-DIAMANT

Temperaturerhöhung. Bei hohen Temperaturen erhöht die gleiche Zufuhr die Gesamtenergie nur unmerklich, z. B. von $100'000 hf$ auf $100'001 hf$. Das entspricht nur einer geringen Unordnungs- und Temperaturerhöhung ΔT .

Einstein erklärte also die Diamant-Anomalie, indem er annahm, dass für die im Kristall **schwingenden ganzen C-Atome** die Energie ebenso **gequantelt** oder **gestuft** sei, wie für Plancks Oszillatoren in der Wärmestrahlung (\rightarrow 1.2).

Damit übertrug Einstein die Idee der Energieportionierung vom Licht auf die Materie. Er zeigte mit diesem speziellen



ANLAUF MIT
ENERGIESTUFEN

Beispiel, dass in atomaren Dimensionen die gewöhnliche Mechanik nicht mehr gilt, sondern mit Energiestufen gerechnet werden muss, die durch Plancks Konstante bestimmt sind: $\Delta E_{\text{mechanisch}} = hf$

Ebenso unwichtig wie die Details der Bewegungen von Atomen in Kristallen scheinen die Details der Bewegungen von Gasmolekülen. Schon um 1920, als man sich noch keine Sorgen um den Zustand der

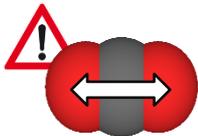


Hertha Spöner

Atmosphäre machte, war es gelungen, Schwingungs- und Rotationseigenschaften von **Molekülen** wie N_2 oder O_2 zu erklären. Sie machen den Hauptteil der Luft aus. Man dachte sich ein Modell der Moleküle aus starren Kügelchen, die nicht nur quantisiert schwingen, sondern auch nur quantisiert rotieren durften. Hertha Spöner war eine der ersten Frauen in der theoretischen Physik. Sie schrieb ihre Dissertation «Über ultrarote Absorption zweiatomiger Gase», d.h. Energiequanten im Ultrarot = IR. Von ihren männlichen Kollegen

gefördert, wurde sie die erste Physik-Professorin in Göttingen.

CO₂SCHWINGT



Heute weiss man: Die Atmosphäre ist für sichtbares Licht fast völlig durchlässig, weil ihre Hauptbestandteile N_2 und O_2 elektrisch kaum beeinflussbar sind. Nicht so die dreiatomigen Gase H_2O , CO_2 , N_2O usw. Sie behindern die Infrarotstrahlung beim Verlassen der Erde, weil sie oft IR-Quanten absorbieren und anschliessend wieder emittieren, teilweise zurück in Richtung Erde. Herta Spöner und andere erhielten die richtigen



CO₂ ROTIERT

Daten, wenn sie annahmen, dass in atomaren Dimensionen die Schwingungs- und die Drehbewegungen und damit auch Schwingungs- und Rotationsenergien der Moleküle quantisiert seien.

2.1.3 «ICH KANN MIR DIESES WIRKUNGSQUANTUM EINFACH NICHT VORSTELLEN!»

(Ergänzung)

Lernete die gleiche Schülerin Relativitätstheorie, würde sie vermutlich nicht klagen: «Ich kann mir die Lichtgeschwindigkeit nicht vorstellen». Sie weiss, was eine Geschwindigkeit ist, sie kann den unerhört grossen Zahlwert irgendwie in Beziehung zu anderen Geschwindigkeiten setzen, und sie weiss, dass für langsame Relativbewegungen die «neue Physik» in die «alte Physik» übergeht.

Mit dem Verhältnis zwischen Quantenphysik und klassischer Physik ist es ähnlich: Wäre h unendlich klein, würden alle Gesetze der Quantenphysik zu Gesetzen der klassischen Physik. Dass das h enorm klein ist, stellt aber nur ein Nebenproblem. Das Hauptproblem ist, das wir **keine Vorstellung für Wirkung** haben! Hier hilft der Drehimpuls, den wir beim Tennis usw. oft «Drall» nennen.

Nicht nur für Elektronen im Atom, sondern beispielsweise auch für eine Eiskunstläuferin gilt Bohrs Regel, die in 2.1.4 besprochen wird: $rmv = k \cdot h/2\pi$.

(Allerdings verlangt die definitive Quantenmechanik zusätzlich zu Bohr, dass wir einzelnen Atomen nur im Mittel einen Ort und eine Geschwindigkeit zuschreiben dürfen, wie in 2.7 erläutert wird.)

Wenn sich die Sportlerin in Rotation bringt, nimmt sie eine riesige Anzahl k von **Drehimpuls-Portionen $h/2\pi$** auf. Wenn wir die mittlere Entfernung r ihrer Körperteile von der Rotationsachse zu 0.1 m, ihre Gesamtmasse zu 50 kg und ihre Rotationsgeschwindigkeit zu 2 m/s annehmen, so erhalten wir $k \cdot h/2\pi = 10$ Js. Damit ergibt sich für die Anzahl Drehimpuls-Portionen bei der Pirouette $k = 9.5 \cdot 10^{34}$. Wir können also sagen:



Vorstellung 1: Das Wirkungsquantum ist eine winzige Portion Drehimpuls (Drall).

Bei Drehbewegungen im Alltag spielt die Portionierung des Drehimpulses keine Rolle, wohl aber bei Drehbewegungen von Molekülen, beispielsweise der CO₂-Moleküle in der Atmosphäre. Für den Treibhauseffekt sind primär nicht die Drehungen, sondern die Schwingungen dieser Moleküle wichtig. Wie bereits Planck und Einstein festgestellt haben, ist auch die **Energie von schwingenden Objekten portioniert**:

Wir studieren das genauer und kehren zur Schaukel von → 1.2 zurück. Wir stellen uns vor, das Kind schaukle mit $f = 1$ Hz, wiege 20 kg und habe eine Maximalgeschwindigkeit von 1 m/s. Beim Schaukeln pendelt die Gesamtenergie zwischen Bewegungs- und Lageenergie hin und her. Sie hat den Wert:

$$E_{\text{total}} = E_{\text{kinmax}} = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 20 \text{ kg} \cdot (1 \text{ m/s})^2 = 10 \text{ J.}$$

Würde die klassische Physik gelten, könnten von der Ruhe aus durch beliebig feine Stösse Maximalgeschwindigkeit und Gesamtenergie in beliebig feinen Stufen grösser und grösser gemacht werden. Das müsste klassisch ebenso für die Schwingungen eines kleinen und leichten CO₂-Moleküls gelten.



Das CO₂ hingegen schwingt sehr viel schneller, nämlich mit $f = 20$ THz. Gemäss (1.2) kann es nur einzelne Energieportionen der Grösse $E = hf$ absorbieren oder emittieren, um beispielsweise vom 5. Zustand in den 6. Zustand zu gelangen. Das geschieht beim Treibhauseffekt im CO₂ durch Absorption eines ganzen IR-Quants. Dieses stammt von der Erde, «sollte» ins Weltall und besitzt die Energie

$$E = 6.63 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot 20 \cdot 10^{12} \text{ Hz} = 1.32 \cdot 10^{-20} \text{ J} = 83 \text{ meV.}$$

Beim schaukelnden Mädchen ist alles $20 \cdot 10^{12}$ -mal anders. In ihm stecken nicht ein paar einzelne Energieportionen, sondern $n = 10 \text{ J} / 6.63 \cdot 10^{-34} \text{ J} = 1.5 \cdot 10^{34}$ Stück! Wenn das Kind ein «müdes» 1 Hz-Quant absorbiert, erhöht sich sein Zustand bloss von $1.5 \cdot 10^{34}$ auf $1.5 \cdot 10^{34} + 1$, unmerklich für das Kind und für uns. Wir haben eine weitere Möglichkeit, uns h zu veranschaulichen:

Vorstellung 2: Das Wirkungsquantum portioniert – zusammen mit f – die Schwingungsenergie.

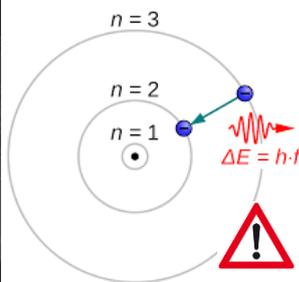
Plancks Konstante hat als Basis aller Teile der Quantentheorie eine ganz grundsätzliche Bedeutung. Aus «Was ist Licht?» kennen Sie die Beziehungen $E = hf$ und $p = h/\lambda$. Diese Beziehungen und solche, die noch folgen werden, liefern uns die Grundlage für eine weitere Vorstellungsmöglichkeit:

Vorstellung 3: « h ist das, was das **Körnige** und das **Wellige** in Quantenobjekten **verbindet**».

2.1.4 Quantenphysik im Atominnern: Bohrs halb-klassisches Atommodell

Ernest Rutherford fand die Atomstruktur mit dem schweren, positiven Kern und der Elektronenhülle. 1913 gelang es seinem dänischen Gastwissenschaftler Niels Bohr (→ PANORAMA 1925), mit einem halb-quantenmechanischen Modell die Stabilität des H-Atoms zu erklären. Sie kennen das Modell. Es ist so anschaulich, dass man es heute noch überall braucht, obwohl es seit 100 Jahren überholt ist!

Das sogenannte **Planetenmodell** ist rein teilchenartig. Ein körniges Elektron (m, q) umkreist, geführt von der Coulomb-Kraft, mit der Geschwindigkeit v im Abstand r das Proton, den Kern des H-Atoms. Das Elektron ist mechanisch ebenso stabil wie ein Satellit, der um die Erde kreist.



Ein Satellit kann durch Energiezufuhr auf eine höhere Umlaufbahn gebracht werden. Wenn analog im Atom das Elektron als Licht zugeführte Energie ΔE absorbiert (aufnimmt), springt es von einer tieferen Bahn auf eine weiter aussen. Beim umgekehrten Prozess gibt es eine bestimmte Energie ab: Emissionslinie. Diese Beschreibung der «Erzeugung und Verwandlung von Licht» auf atomarer Ebene geht einher mit der Vorstellung, dass

FIGUR 2.2: NIELS BOHR MIT 25 JAHREN UND SEIN MODELL FÜR DAS H-ATOM VON 1913

wegen $E = hf = hc/\lambda$ nur bestimmte Spektrallinien mit Frequenzen f und Wellenlängen λ auftreten. Licht, das nicht zu Sprüngen von Bahn zu Bahn passt, spielt in diesem Modell keine Rolle.

An dieser Stelle liefert die Natur eine Steilvorlage für die Quantenphysik: Während für Planeten, Satelliten usw. im Rahmen der Kepler-Gesetze **alle** Bahnradien und Energien mit den passenden Geschwindigkeiten möglich sind, muss das bei den Elektronen in den Atomen anders sein! Sie senden nur **gewisse Spektrallinien** aus, wie Figur 2.3 zeigt.

Dem Basler Gymnasiallehrer Johann Jakob Balmer war es gelungen, die Daten der sichtbaren Wasserstofflinien mathematisch zu fassen. In Balmers Formel tauchten erstmals **ganze Zahlen** in der Atomphysik auf. Später entdeckten Theodore Lyman und Friedrich Paschen gleiche Gesetze für Linien im ultraviolett und infraroten Bereich. Niels Bohr musste mit seinem Atommodell begründen können, weshalb nur **gewisse Bahnen** möglich sind, und er musste Balmers Formel ableiten können.

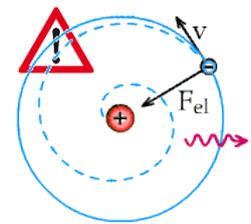


FIGUR 2.3: SPEKTRALLINIEN DES H-ATOMS

Bohr postulierte, dass im Atominnern eine neue Physik gelten müsse. Einerseits sollen Elektronen, geführt durch elektrische Kräfte, nach den bisher bekannten Gesetzen der Physik kreisen. Andererseits dürfen sich Elektronen im Atom nur auf gewissen, sogenannten **stationären** Bahnen bewegen – im Unterschied zur astronomischen Objekten. Nur zu diesem Zweck, *ad hoc*, stellt Bohr für Elektronenbahnen das **Quanten-Postulat** (2.1) auf. Darin tritt Plancks Wirkungsquantum **h** erstmals mit einer Aufgabe fürs Atominnere in Erscheinung:

Niels Bohr 1913:	<i>Auf den erlaubten Bahnen gilt:</i> $rmv = k \cdot h / 2\pi$ mit $k = 1, 2, 3 \dots$	(2.1)
------------------	--	-------

Damit begannen aber auch Probleme, die bereits Bohr selber erkannte: Das Planetenatom wirkt als Mini-Sender. Kreisende Elektronen sind beschleunigt und müssten ebenso strahlen wie die Elektronen in den Antennen von Hertz und Marconi (→ Abschnitt 1.1) oder heute im Handy. Diese elektromagnetische Strahlung transportierte Energie weg. Das Elektron hätte weniger und weniger Energie und müsste abstürzen wie ein durch die Atmosphäre gebremster Erdsatellit. **Die Atome wären instabil; es gäbe uns nicht!**



Nils Bohr löste dieses grundlegende Problem in seinem Modell auf spektakuläre Weise:

☹️	<i>Niels Bohr verlangte, dass Elektronen auf «erlaubten» Bahnen nicht strahlen, d. h. er setzte für diese «stationären» Bahnen die Elektrodynamik ausser Kraft.</i>	☹️
----	---	----

Auf den speziellen Bahnen, die (2.1) erfüllen, darf die gewöhnliche Physik nicht mehr gelten. Auf ihnen soll das Elektron nicht strahlen, sondern stabil, stationär kreisen. **h** erhält damit eine neue, wichtige Aufgabe: **h** rettet die Stabilität der Atome. (Ein Trost: Sie müssen keine Rechnungen mit (2.1) machen.)

Auf Bohrs Modell reagierten die Physiker in Zürich unterschiedlich: Einstein, Professor an der ETH, war enthusiastisch. Endlich konnte man die Vielfalt der Spektrallinien durch Sprünge zwischen den **Energie-stufen** der stationären Bahnen übersichtlich erklären. (Figur 2.3) Endlich konnte man die Größenordnung der Atome aus fundamentalen Größen (e , m , h) ableiten. Doch Einsteins Uni-Kollege Max von Laue und Einsteins Privatdozent Otto Stern, beides später Nobelpreisträger, wanderten diskutierend auf den Üetliberg und leisteten den «Üetlichswur»: *Wenn sich dieses verrückte Modell [von Bohr] als richtig herausstellte, würden sie die Physik an den Nagel hängen.*

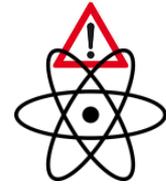
Bohrs Modell mit den klassischen Teilchen p^+ und e^- liefert beim Wasserstoff genau die richtigen Werte der Spektrallinien, ungefähr die Atomgröße und ist sehr anschaulich.

Bohr erhielt 1922 den Nobelpreis, *for his services in the investigation of the structure of atoms and of the radiation emanating from them*. Bohrs Modell wurde erfolgreich benützt

- (1) ... um die Spektrallinien von Wasserstoff und ähnlichen Fällen (Lithium oder Natrium oder He^+ oder Be^+ usw. mit einem einzelnen Valenzelektron) genau zu berechnen,
- (2) ... um die Energiestufen von energetisch tief liegenden Elektronen zu berechnen, etwa für die Röntgenstrahlung grosser Atome wie Nickel,

- (3) ... um die Veränderungen von Spektrallinien zu erklären, die beobachtet werden, wenn man die Atome in elektrische oder magnetische Felder steckt,
- (4) ... um das Verhalten von Atomen in hoch angeregten Zuständen zu erläutern usw.

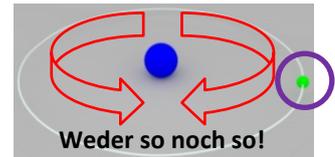
Entscheidend für die auch heute noch grosse Akzeptanz von Bohrs höchst problematischem Modell ist seine **Anschaulichkeit**. Bohrs Atommodell steckt auch im international anerkannten Signet (Ikon) für «Atom».



2.1.4 Probleme mit der Quantenphysik im Atominnern: Die Krise von Bohrs Atommodell

(1) In Bohrs Model ist das Wasserstoffatom flach, zweidimensional, 2D, **scheibenförmig**. Wirkliche Atome aber sind kugelig, dreidimensional, 3D, räumlich!

(2) Im energieärmsten Zustand mit $k = 1$ muss das Elektron in Bohrs Modell umlaufen. Experimentell findet man jedoch, dass im Grundzustand das Elektron **nicht kreist** und keinen Drall besitzt, also $k = 0$ sein müsste. Dann müsste jedoch das Elektron durch den Atomkern hin und her pendeln. Das wäre, wie wenn Newtons Apfel in einem Schacht in der Erde dauernd durch den Erdmittelpunkt hin und her pendelte ...



(3) Mit dem Bohr-Modell kann man die Spektrallinien nicht einmal beim zweiteinfachsten Atom, dem **Helium**, genau ausrechnen. Auch der atomare **Magnetismus** macht Probleme.

(4) Nach Bohr kann es, im Gegensatz zur alltäglichen Erfahrung in der Chemie, **keine Elektronenpaar-Bindung** geben. Beim H_2 müsste jedes der beiden Elektronen zugleich auf zwei Bahnen umlaufen!

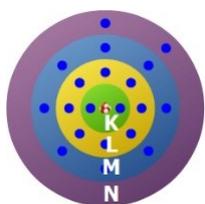


(5) Wolfgang Pauli berechnete in seiner Dissertation das H_2^+ , das einfachste Molekül. Mit einem Dreiteilchen-Modell ($2 \times p^+$ plus $1 \times e^-$) ergaben sich aber vom Experiment abweichende Energiewerte.

Niels Bohrs Atom-Modell zeigt **eine Reihe von Mängeln**, auf die Max Born und andere schon früh hingewiesen haben. Dieses Modell ist zwar anschaulich, aber halb falsch!

Ein Modell, das die Gesetze ausser Kraft setzt, welche Radioantennen, Röntgenröhren und Elektromotoren bestens erklären, widerspricht dem Grundgedanken der Physik: Physikalische Gesetze müssen universell gelten. Die Ursache dieser Probleme steckte in Bohrs Grundannahmen von 1913: «gewöhnliche Mechanik plus etwas Neues mit h .»

Im Original: *Wie man die Bewegungsgesetze der Elektronen auch modifizieren mag, man kommt nicht daran vorbei, eine der klassischen Elektrodynamik fremde Grösse – nämlich die Plancksche Konstante (...) – in die betreffenden Gesetze einzuführen.* Im Übrigen behielt Bohr «die betreffenden Gesetze» der klassischen Elektrodynamik bei.

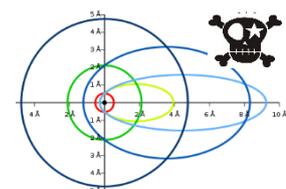


Schalen?

Besonders irreführend ist der Begriff «Elektronenschale». Er wäre nicht total unsinnig, wenn man sich die Schalen wie die Teile der Atmosphäre vorstellte: Troposphäre, Stratosphäre usw. Doch suggerieren Bilder kompakte Schalen mit Elektronen wie Rosinen im Teig...

Bei Atomen mit vielen Elektronen können mehrere auf der gleichen **Energienstufe** sein. Statt von «Schalen» sollte man immer von Energiestufen sprechen: Im Atom ist die **Energie gequantelt**, nicht der Raum für die Elektronen. Übrigens sind die «Schalen» mit K, L, M, N und nicht mit A, B, C, D

bezeichnet, weil man anfänglich noch «Schalen» J, H, G ... «weiter innen» vermutete. Leider haben sich die Begriffe «Schale» und «Schalenmodell» eingebürgert. Keinesfalls soll man sich vorstellen, im Atom gebe es Sphärenschalen, zwischen denen oder auf denen die Elektronen herumgeführt würden wie in einem Kugellager. In dieser simplen Weise hatte sich Johannes Kepler das Planetensystem vorstellen müssen, weil er die Konzepte «Kraft» und «Gravitation» nicht zur Verfügung hatte.



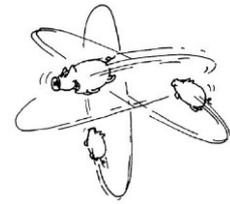
Bohrs H-Atom ist flach!?

Schalen- und Planetenmodelle sind anschauliche, aber irreführende Bilder des Atoms.

2.1.5 Es braucht eine neue Mechanik!

(Ergänzung)

Nachdem Max Born schon vor einiger Zeit festgestellt hatte, dass Bohrs scheibenförmige Atome in Kristallen zu falschen Werten führen, schrieb er am 21. Oktober 1921 aus Göttingen seinem Freund Einstein nach Berlin. Er klagte über die Inflation und fuhr fort: *Mit Pauli gehe ich daran, Quantenrechnungen über Atome zu machen. Vielleicht kommt etwas dabei heraus.* Und dann kommt die berühmte Klage: **Die Quanten sind eine hoffnungslose Schweinerei.**



Ein Jahr später meldete er keinen Fortschritt: *Ich plage mich mit meinem Assistenten Hückel um die Quantelung mehratomiger Molekeln.* Nochmals ein Jahr später klagte er über die politischen Folgen der französischen Besetzung und meinte resigniert: *Ich denke, wie immer, hoffnungslos über Quantentheorie nach und suche nach einem Rezept, um Helium (...) zu rechnen.*

Doch am 15. Juli 1925 tönte es optimistischer: *Mit Jordan zusammen untersuche ich systematisch, aber mit geringem Aufwand an Geist, (...) Beziehungen zwischen mehrfach periodischen klassischen Systemen und Quantenatomen. (...) Überhaupt, meine jungen Leute, Heisenberg, Jordan, Hund, sind glänzend.*

Damit sind wir an der Bruchstelle zwischen der vertrauten, «klassischen» Mechanik und einer neuen Mechanik, der Quantenmechanik, angelangt. Die Lawine wurde durch den 24-jährigen Werner Heisenberg losgetreten, als er im Juni 1925 seinen Heuschnupfen auf Helgoland auskurierte. Heisenberg machte zwei Schritte: Er verzichtete auf das nicht beobachtbare Bewegungsgesetz $x(t)$ und erfand eine abstrakte Mathematik für die Berechnung der Energie im Atom.

Weil Heisenbergs Abstraktion sogar vielen Fachleuten zu unvertraut und seine neue Mathematik im Gymnasium zu anspruchsvoll ist, folgen wir nicht ihm, sondern lassen uns von de Broglie inspirieren, von dem Born im gleichen Brief schrieb, er habe über Umwege von ihm gehört. *Daraufhin habe ich die Arbeit von Louis de Broglie gelesen.*

Reflexion: Sind Sie bereit, Bohrs Atommodell durch ein besseres zu ersetzen? Warum?

AKTIVITÄTEN ZU 2.1

AUFGABEN:

2.1) Zum Bohrschen Atommodell

2.2) Rutherford an Bohr im Brief vom 20. März 1913

MINT-Ergänzung: M2.1) Atom-Modell von George Gamow

EXPERIMENTE:

H-Spektrum

Ergänzung: IR-Spektroskopie mit Chemie-Gerät

BIOGRAPHIEN:

Niels Bohr

Hertha Sponer

Sachverhalt	Stabilität H-Atom	Form der Atome	Größe des H-Atoms	Energie-stufen H-Atom	Rotation Grund-zustand	El.paar-Bindung	Diamant Kristall	Perioden system	Tunnel-effekt
Bohr-Modell	ad hoc	flache Scheibe	Schale r-Bohr	genau	falsch $h/2\pi$	nicht möglich			
Orbital-Modell	gut	gut Kugel	gut flauschig	genau	genau 0	gut	gut	+ Pauli gut	gut

100 Jahre nach seiner Ablösung durch das Orbitalmodell sprechen so viele Argumente gegen Bohrs Atommodell, dass man es endlich in den Ruhestand versetzen soll!

2.2 Louis de Broglie hat eine geniale und revolutionäre Idee.

Etappe 1, 1. Teil: Elektronen sind auch wellig.

2.2.1 Die revolutionäre Idee: Materie sollte auch Wellenaspekt zeigen!

Prince Louis de Broglie überlebt das Gemetzel des ersten Weltkriegs als Funker auf dem Eiffelturm. Für seine Dissertation arbeitet er nicht im Privatlabor seines Bruders Maurice, sondern theoretisch, mit Einsteins Relativitätstheorie. Dabei entwickelt er eine Idee: **Nicht nur Licht, sondern auch Materie müsste sich «wellig» zeigen.** Genauer: Wenn Energie in Form von Licht Teilchen- und Wellenaspekt zeigt, sollte das auch für Energie in der Form von Elektronen der Fall sein. Die Welle-Teilchen-Dualität vom Licht auf die Materie erweiternd, stellt Louis de Broglie ein Programm auf: [Il faut] *unifier les points de vue corpusculaire et ondulatoire et approfondir un peu le sens véritable des quanta.*

Für seine kühne Vermutung entwickelt er eine theoretische Rechtfertigung folgender Art: «So wie die Wellenoptik umfassender ist als die Strahlenoptik, so muss eine neue Wellenmechanik umfassender sein als die alte Mechanik.» Er kommt zum genialen und revolutionären Schluss:

*À toute particule matérielle de masse m et de vitesse v
doit être associée une onde réelle.*

Mit unseren Begriffen: Materie zeigt nicht nur den vertrauten Teilchenaspekt, sondern einen bis dato unbekanntes Wellenaspekt.



Louis de Broglie gibt auch die Länge seiner neuen Wellen an:

Louis de Broglie 1924:
Jedes Objekt mit Masse m und Geschwindigkeit v zeigt Wellenaspekt.
 Die **de Broglie-Wellenlänge** λ_{dB} ergibt sich aus dem Impuls $p = m \cdot v$:

$$\lambda_{dB} = h/mv = h/p \quad (2.2)$$

De Broglies Idee ist revolutionär, stösst sie doch die grundlegende Annahme der Mechanik um: Die Masse eines Sandkorns oder einer Portion Wasser kann man sich in einem Punkt konzentriert denken. Dort wirkt die Gravitation oder die elektrische Kraft usw. Eine «wellige» Masse ist aber irgendwie verteilt, nicht lokal. Man weiss gar nicht, wie viele Wellenlängen die ganze Masse umfasst.

2.2.2 Die einfache Mathematik

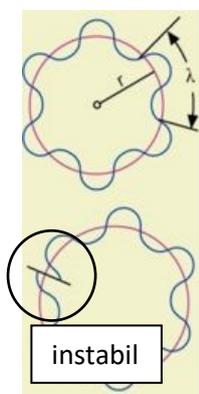
De Broglie argumentierte mit der Relativitätstheorie; wir stützen uns auf eine Analogie mit dem Licht: Für die elektromagnetische Strahlung γ gilt (1.3).

$$p_\gamma = E_\gamma/c = hf_\gamma/c = h/\lambda_\gamma$$

 Daraus erhält man:

$$\lambda_\gamma = h/p_\gamma$$

Wir **nehmen** nun **an**, die Beziehung fürs Licht gelte genauso für die Materie und erhalten $\lambda_{de\ Broglie}$. Das ist natürlich keine mathematische Ableitung. Weder de Broglies relativistische Rechnung noch unsere Kurzfassung mit der Analogie können Beweise für die Gleichung (2.2) sein. (2.2) ist grundlegend neu!



FIGUR 2.4:
STABILE UND
INSTABILE
ELEKTRONEN

Louis de Broglie hatte für seine **neue Idee**, auf die er, wie er sagte, *nach langem, einsamem Nachdenken* gekommen war, **nicht die geringste experimentelle Stütze**. Sein zentrales Argument war indirekt. Er konnte nämlich Bohrs mysteriöses Postulat (2.1), die ganzen Zahlen bei den Spektrallinien und die Stabilität des Wasserstoffatoms, neu und anschaulich begründen. Sein *effort* war nur durch den Erfolg gerechtfertigt. Er forderte (wie heute scheint: einfach), dass auf einer stabilen Bahn eine **ganze Anzahl k Wellen** Platz haben müssen. In Figur 2.4 ist $k = 6$.

$$k \cdot \lambda_{dB} = k \cdot h/mv = 2\pi r \Leftrightarrow rmv = k \cdot h/2\pi \quad \text{Das kennen wir als (2.1).}$$

Diese Überlegung überzeugte die Experten, die seine Dissertation beurteilen mussten. Zu ihnen gehörte Albert Einstein. Der schrieb seinem Kollegen H. A. Lorentz: *Der junge de Broglie [Einstein kannte nur den älteren Bruder persönlich] hat einen sehr interessanten Versuch zur Deutung der Bohr-Sommerfeldschen Quantenregel unternommen. (...) Ich habe einiges gefunden, was für seine Konstruktion spricht.*

Einstein hatte 1911 vorhergesagt, *dass die nächste Phase der Entwicklung der theoretischen Physik uns eine Theorie des Lichtes bringen wird, welche sich als eine Art Verschmelzung von Undulations- [Wellen] und Emissionstheorie [Teilchen] des*

Lichts auffassen lässt. Genau diese Verschmelzung leistete de Broglie nun für die Materie. Die entsprechende Interpretation der algebraisch einfachen Gleichung lautet:

Links steht der **Wellenaspekt** λ_{dB} $\lambda_{dB} = h/p$ rechts steht der **Teilchenaspekt** $mv = p$.

Gleichung (2.2) besitzt die gleiche Struktur wie Gleichung (1.2) für das Quantenobjekt «Licht». Ganz allgemein scheint auch Materie ein Quantenobjekt zu sein, allerdings eines mit Ruhemasse $m > 0$. Plancks Wirkungsquantum h taucht hier erneut auf, wieder in einem anderen Zusammenhang.

2.2.3 Ein paar Rechnungen, um mit de Broglies Wellenlänge vertraut zu werden

(1) Kontrolle der Masseinheiten: $[\lambda_{dB}] = [h/mv] = \text{Js}/\{\text{kg} \cdot (\text{m/s})\} = \text{Nms}/\text{kgms}^{-1} = \text{mkgs}^{-2}\text{ms}/\text{kgms}^{-1} = \text{m}$. Die merkwürdige Masseinheit von h führt also in dieser Verknüpfung zu einer gewöhnlichen Länge.

(2) Wir betrachten ein Staubkörnchen von $1 \mu\text{g}$ Masse, das im Sonnenlicht mit 1 mm/s hin und her schwirrt. Es gilt: $\lambda_{dB} = h/mv = 6.6 \cdot 10^{-34} \text{ Js} / (10^{-9} \text{ kg} \cdot 10^{-3} \text{ m/s}) = 6.6 \cdot 10^{-22} \text{ m}$. Das ist viel weniger als der Durchmesser des Atomkerns.

Die de Broglie-Wellenlänge spielt im Alltag keine Rolle. Sie entzieht sich unserer direkten Erfahrung vollständig. Ein ganzer Mensch ist so schwer, dass seine de Broglie-Wellenlänge getrost $= 0$ gesetzt werden darf. Bei Menschen und ähnlichen «Teilchen» merkt man nichts vom Wellenaspekt.

(3) Wir betrachten ein Alpha-Teilchen, wie es Rutherford auf die Goldfolie geschossen hat. Es besitzt nur $7 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ Masse und ist $3 \cdot 10^7 \text{ m/s}$ schnell, etwa 10% der Lichtgeschwindigkeit. Mit diesen Werten erhalten wir: $\lambda_{dB} = 3 \cdot 10^{-15} \text{ m}$. Das ist etwa so gross wie ein Atomkern.

Die de Broglie-Wellenlänge ist im Mikrokosmos zentral. In Experimenten kann man sie erkennen.

Weil die de Broglie-Wellenlänge winzig ist, macht sich der Wellenaspekt nur selten bemerkbar.

(4) **Mit de Broglie-Wellen die Grösse des H-Atoms abschätzen** (bloss als Scheibe anstatt in 3-D, 😊): Aus der Ionisationsenergie errechnet man, dass das Elektron im H-Atom nur etwa 1% von c schnell ist. Dazu gehört nach (2.2) die Wellenlänge $\lambda_{dB} = h/mv = 6.6 \cdot 10^{-34} \text{ Js} / (9 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 3 \cdot 10^6 \text{ ms}^{-1}) = 2.4 \cdot 10^{-10} \text{ m}$. Wir betrachten den Grundzustand des H-Atoms mit $k = 1$. Mit der Idee von Figur 2.4 finden wir: $1 \cdot \lambda_{dB} = U = 2\pi r$. Wenn wir das nach r auflösen, finden wir $r \approx 4 \cdot 10^{-11} \text{ m} = 40 \text{ pm}$. Das ist die richtige Grössenordnung. Niels Bohr kam auf den Radius $r_{\text{Bohr}} = 53 \text{ pm}$.

In → 2.3 und 2.4 werden eine Reihe von Experimenten diskutiert, die de Broglies Beziehung (2.2) bestens bestätigen. Immer neue Experimente mit immer schwereren Objekten, sogar mit ganzen Biomolekülen, bestätigen folgende Feststellung:

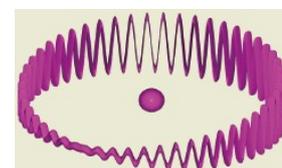
**Alle Objekte mit Masse m und Geschwindigkeit v zeigen Dualität.
Elektronen, Neutronen, Atome, Moleküle ... sind Quantenobjekte (mit Ruhemasse).**

2.2.4 Stärken der Materie-Wellen

Wenn de Broglies Wellen nicht nur Fiktion, sondern Naturgesetz sind, müssten ganze Atome und sogar ganze Moleküle Welleneigenschaften zeigen, z. B. Interferenz am Doppelspalt. Sie müssten im Schattensbereich genau hinter dem undurchdringlichen Steg nachgewiesen werden können. Dass das so ist, zeigen die verschiedenen Experimente im Abschnitt → 2.3. Die Materie kann sich offensichtlich wellenartig durch beide Spalte zugleich bewegen und dahinter konstruktiv überlagern. Das ist faszinierend, aber auch ein bisschen unheimlich, denn an anderen Stellen löscht sich die Materie aus!

De Broglies Idee hat ihm 1929 den Nobelpreis eingebracht. De Broglies Idee regte Erwin Schrödinger zur Formulierung einer Wellenmechanik an. Diese erläutern wir später im Abschnitt → 2.5.2. Die Begriffe **Materiewelle** und **matter wave** haben sich etabliert. Im Französischen spricht man von *onde de de Broglie*.

Als Serge Haroche 2012 den Nobelpreis für seine Forschung an einzelnen Quantenobjekten erhielt, erläuterte er diese u. a. mit dem Bild nebenan: Ein hoch angeregtes Elektron befindet sich weit weg von seinem Atomrumpf in einem Schrödinger-Katzen-Zustand, dargestellt mit zwei Materiewellen unterschiedlicher Wellenlänge, die um ein Cäsiumatom laufen.



2.2.5 Licht und Elektronen sind ähnlich: Welle-Teilchen-Dualität beim «Übermikroskop» (Ergänzung)

Aus heutiger Sicht gibt es eine glänzende Bestätigung für de Broglies Ansatz, mit der Dualität zu arbeiten: Das Elektronenmikroskop (EM). Es wurde in den Anfängen «Übermikroskop» genannt, liefert plastische Ansichten, Bilder mit grosser Tiefenschärfe, beispielsweise des Kopfs einer Mücke. In der Abbildung ist eine nur etwa 1000-fache Vergrösserung eingestellt.



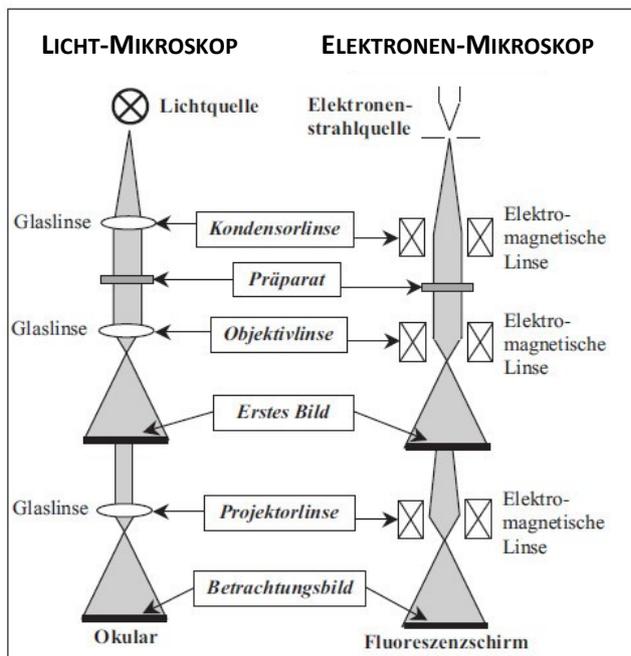
Im ersten Moment glaubt man, es sei nur ein gewöhnliches Foto, das mit einem sehr leistungsfähigen Makro-Objektiv aufgenommen worden sei. Effektiv stecken eine ganz andere, viel teurere (typisch 1 Mio. CHF) Abbildungstechnik und ein viel grösserer Aufwand zur Präparation der Probe dahinter.

Das zweite Bild scheint aus einem Labor für Hochenergiephysik der 30-er Jahre zu stammen. Effektiv erkennt man eine Vakuumanlage, eine Hochspannungsquelle und einen Bildschirm für das 1937er-Elektronenmikroskop von Manfred von Ardenne.



Das EM zeigt die Dualität der Elektronen von der technischen Seite her. Der Teilchenaspekt steckt in ihrer Masse und ihrer Ladung: mit Hochspannung (1 kV bis 1 MV) werden sie beschleunigt und auf die Probe gelenkt, die oft mit Gold überzogen oder tiefgekühlt ist. Nach de Broglie besitzen Elektronen auch einen Wellenaspekt mit $\lambda_{dB} = h/p$. Ihr Impuls hängt klassisch mit der Bewegungsenergie $E = p^2/2m$ zusammen. Diese stammt von der elektrischen Energie 1 keV bis 1 MeV. Damit erreicht man λ_{dB} - Werte zwischen 40 pm und 1 pm, also atomare Grössenordnung.

Mit einer Linsenkombination, die derjenigen des Lichtmikroskops entspricht (siehe Figur unten), erzeugt man ein vergrössertes Bild.



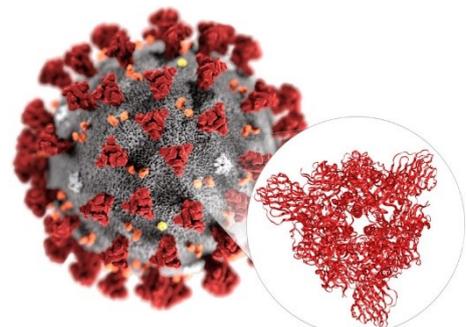
Allerdings muss man elektromagnetische Linsen einsetzen, denn Glaslinsen sind für Elektronen ebenso undurchlässig, wie für Röntgenstrahlen. (Es gibt deshalb kein Röntgenmikroskop.)

Die Vergrösserung, die man mit dem EM effektiv erreicht, ist weniger durch λ_{dB} begrenzt als durch die Unvollkommenheit der magnetischen Linsen. Heute erzeugt man die Bilder nicht mehr via Fluoreszenz, sondern mit einer Kamera, in der sich der Teilchenaspekt der Elektronen bemerkbar macht und die an den Computer angeschlossen ist. Damit kann man Bilder nachträglich so einfärben, wie die Spikes vom Covid-Virus.

Man kann auch «Ein-

zoomen». Beachten Sie, dass sich der Unterschied zwischen Quantenobjekten ohne und mit Ruhemasse auch hier zeigt:

$$\lambda_{Licht} = \frac{hc}{E_\gamma} \qquad \lambda_{de\ Broglie} = \frac{h}{\sqrt{2mE_{Elektron}}}$$



2.2.6 Deshalb merk(t)en wir nichts von den Materie-Wellen

(Ergänzung)

Die Tabelle zeigt die Dominanz des Teilchenaspekts. Sie zeigt klar, wieso der Wellenaspekt sogar beim Elektron, dem leichtesten Teilchen, nicht offensichtlich ist und lange verborgen blieb. Vergleichen Sie diese Tabelle mit derjenigen von Figur 1.8 im Modul «Was ist Licht?».

	WELLENASPEKT ERKENNBAR					TEILCHENASPEKT DOMINIERT		
Wellenlänge λ_{dB}	10 μm	1 μm	100 nm	10 nm	1 nm	100 pm	10 pm	1 pm
<i>Grössenvergleich</i>	<i>Haar</i>	<i>Zelle</i>	<i>Virus</i>	<i>Molekül</i>	<i>Atom</i>			<i>Urankern</i>
Elektronen-Energie E	10 neV	1 μeV	100 μeV	10 meV	1 eV	100 eV	10keV	1 MeV
<i>Umgebung</i>	<i>XX Lab.</i>	<i>X Lab.</i>	<i>Labor</i>	<i>Leben</i>	<i>Sonne</i>		<i>Novae</i>	<i>Schwarz.L</i>
Temp. Wärmeenerg.	100 μK	3 mK	1 K	300 K	10000K	3 MK	1 GK	300 GK

DER WELLENASPEKT DES ELEKTRONS WIRD ERST BEI DEN SO KLEINEN ENERGIEN ERKENNBAR, BEI DENEN MAN DIE WÄRMESTRAHLUNG DER UMGEBUNG EXTREM ABSCHIRMEN MUSS. GRAU: RELATIVITÄT ZU BERÜCKSICHTIGEN.

2.2.7 Schwächen der Materie-Wellen

De Broglies Grundidee, das Elektron sei ein ausgedehntes Quantensystem wie das Licht, bleibt genial. Der Wellenaspekt der Materie ist heute durch viele Experimente bestätigt.

Und doch ist offensichtlich, dass de Broglies **Theorie** der Materiewellen **unvollständig** ist:

- (1) De Broglies Atommodell gemäss Figur 2.4 weist neben allen Stärken auch noch Schwächen von Bohrs Modell auf. Die einzige Ausnahme ist das Strahlungsproblem. Wenn das Elektron wie ein Spaghettium den Wasserstoff-Kern läge, wäre es nicht beschleunigt und würde keine Energie abstrahlen. Dieses Modell hat sich nie durchgesetzt.
- (2) Es ist unklar, was in de Broglies Welle schwingt. Sicher ist es nicht so, dass die de Broglie-Welle so etwas wie ein Draht ist, der irgendwie das Elektron auf seiner Bahn führt.

Schon de Broglie selbst erkannte: *La présente théorie doit donc plutôt être considérée comme une forme dont le contenu physique n'est pas entièrement précisé que comme une doctrine homogène définitivement constituée.* Erst die Quantenmechanik, die «doctrine homogène définitivement constituée», konnte angeben, was schwingt. Sie wird in → 2.6 vorgestellt.

Für uns geht es jetzt darum, uns von der Richtigkeit von de Broglies kühner Idee durch Experimente überzeugen zu lassen. Der Nachweis von Materiewellen gelang natürlich erst, als man wusste, dass es sie geben sollte und in welchen Grössenordnungen man mit passenden Experimenten nach ihnen suchen musste.

Reflexion: Was halten Sie von Einsteins Charakterisierung, de Broglies Idee sei eine «Konstruktion»? Vergleichen Sie diese mit Einsteins Selbsteinschätzung der Lichtquantenidee im Abschnitt 1.3!

AKTIVITÄTEN ZU 2.2

AUFGABEN:

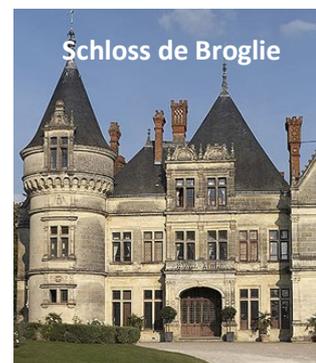
- Ergänzung: M2.5) Versuche zur «Rettung der Stabilität» des Atoms
- Ergänzung: M2.6) Theoretische Probleme bei den de Broglie-Wellen

EXPERIMENTE: -

PANORAMA 1925: Neubeginn nach dem Zusammenbruch

BIOGRAPHIE:

Louis de Broglie

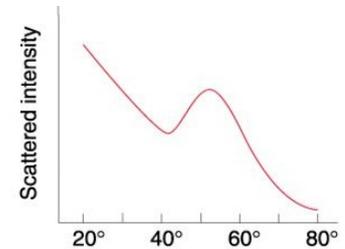


2.3 Bestätigung des Wellenaspekts und der de Broglie-Wellenlänge bei freien Quantenobjekten

Etappe ①, 2. Teil: Elektronen, Neutronen usw. zeigen Interferenzen.

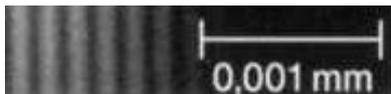
2.3.1 Historische Experimente

Ironie des Schicksals: Clinton Davisson wusste nichts von Materiewellen, als er in einem US-Industriehaus an der Verbesserung von Röhren arbeitete. Schon 1920 hatte er Nickel mit Elektronen beschossen, war aber mit den Ergebnissen unzufrieden. Durch glückliche Umstände gelangten die Daten zu Max Born, der de Broglies Wellen kannte. Born deutete die Messwerte neu, und informierte Davisson. Das motivierte diesen, zusammen mit Lester Germer genauer zu messen. 1927 beobachteten sie bei einem Winkel von 50° zwischen einfallenden und gestreuten Elektronen ein Maximum, den «quantum bump». Die von Röntgenstrahlung an Kristallen bekannte Bragg-Streuung an den regelmäßig angeordneten Atomen führt zu konstruktiver oder destruktiver Überlagerung, je nach Winkel. Elektronen zeigten also Wellenaspekt, genauso wie Röntgenstrahlung. Das brachte ihnen 1937 den Nobelpreis *for their experimental discovery of the diffraction of electrons by crystals*. Davisson teilte den Preis mit P. T. Thomson, der den Wellenaspekt von Elektronen etwas später beim Durchstrahlen dünner Metallschichten gezeigt hatte.



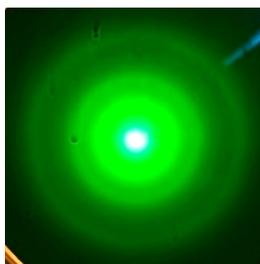
MESSWERTE VON DAVISSON

Die direkte Bestätigung von de Broglies Behauptung mit dem **Doppelspalt** gelang erst 1961. Das Kunststück von **Claus Jönsson** war, zwei $1\ \mu\text{m}$ schmale und nur um $2\ \mu\text{m}$ voneinander getrennte Spalte herzustellen. Darauf schoss er **Elektronen**, die er mit 50 kV beschleunigte, die also etwa $0.4 \cdot c$ schnell waren. Ohne weitere Hilfe hätte er die Fotoschicht für das abgebildete Muster in mehreren Kilometern Entfernung hinter dem Doppelspalt aufstellen müssen. Er konnte aber ein umgebautes Elektronenmikroskop benutzen. Das Bild zeigt den erwarteten Wechsel zwischen Stellen, wo viele und Stellen, wo wenige Elektronen angekommen sind und den Film geschwärzt haben. Dieser Wechsel entsteht durch konstruktive und destruktive Interferenz der Materiewellen.



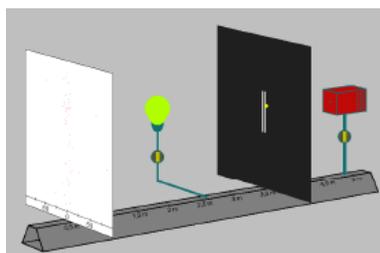
2.3.2 Ein Schalexperiment zeigt den Wellenaspekt von Elektronen

Wenn man Elektronen mit etwa 2 kV beschleunigt und statt auf einen Nickel-Kristall auf ein Pulver aus Graphit-Kristallen schickt, erzeugt der Strahl auf dem Leuchtschirm eine Struktur, deren Helligkeit wie erwartet von innen nach aussen abnimmt. Zusätzlich gibt es jedoch Ringe, die auf die konstruktive und destruktive Interferenz der de Broglie-Wellen hinweisen. Die Ringe erinnern an die Himmelserscheinung Halo, wo Eiskristalle entsprechend der Wellenlängen des Lichts Maxima und Minima verschiedener Farben erzeugen. Die Einzelheiten werden im → EXPERIMENT diskutiert, das auch die Überprüfung der de Broglie-Wellenlänge (2.2) ermöglicht.



2.3.3 Simulationen mit Quantenobjekten am Doppelspalt

Weil Experimente mit Neutronen, Atomen oder ganzen Molekülen technisch sehr schwierig und damit für Gymnasien unerschwinglich sind, gibt es allerlei Simulationen. Diese können helfen, eine gewisse Vertrautheit für die Beziehungen zwischen der Geometrie des Doppelspalts und der de Broglie-Wellenlänge zu entwickeln. Ein nützliches Beispiel wurde an der Universität München im Rahmen des milq-Kurses zur Quantenphysik entwickelt. Aus einer Quelle (rot) kann man verschieden schnelle Elektronen, Neutronen usw. auf einen einstellbaren Doppelspalt schießen, auf einem Schirm registrieren und die Geometrie ausmessen. Die Simulation beruht auf der Gültigkeit von de Broglies Beziehung (2.2).



2.3.4 Bestätigung mit Neutronen am Doppelspalt: Experiment von Anton Zeilinger et al.

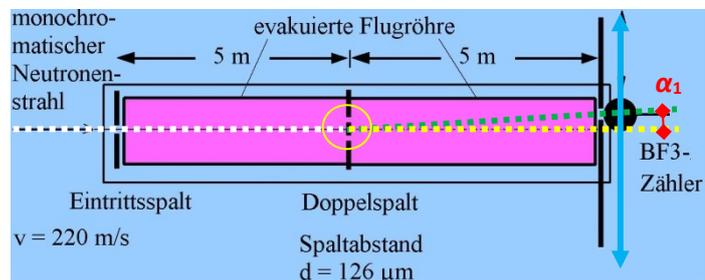
Nicht für die Schule geeignet, aber durchsichtig und aufschlussreich ist das Experiment, das 1988 Anton Zeilingers Team in Wien durchführten. Sie «nahmen» **Neutronen** aus einem Kernreaktor, bremsten diese ab und leiteten sie in die Versuchsanordnung mit einem Doppelspalt. Solchen Beschuss mit Neutronen benützt man in der angewandten Forschung zur Strukturuntersuchung beispielsweise von Kristallen oder Bio-Molekülen.



BILCK INS LABOR VON ZEILINGER ET AL., RECHTS AM BILDRAND

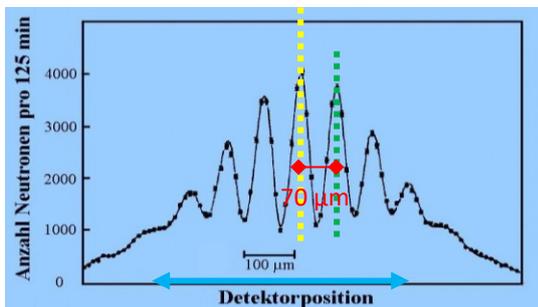
Die Grundlagenforschung von Zeilinger und seinem Team spielt sich im gelben Tank ab. Dort werden die Neutronen nach 5 m Flug durch den leeren Raum am Doppelspalt entsprechend der de Broglie-Wellenlänge abgelenkt (schematisch in Figur 2.5a). Nach weiteren 5 m Flug treffen sie auf einen Detektor mit Bor (als BF₃). Wenn ein Bor-Kern das Neutron verschluckt, sendet er ein γ -Quant aus, durch welches das eingetroffene Neutron zählbar wird.

Die Position des Zählers wird nach jeweils 125 Minuten um etwa $10\ \mu\text{m} = 1/100\ \text{mm}$ (!) in der Pfeilrichtung verschoben. Das Ergebnis der Messreihe ist in Figur 2.5b mit Symmetrieachse und Massstab dargestellt, Blickrichtung von rechts. Die Interferenzerscheinung wird nicht bloss als Hell-Dunkel sichtbar, sondern quantitativ durch die Zählrate angegeben.



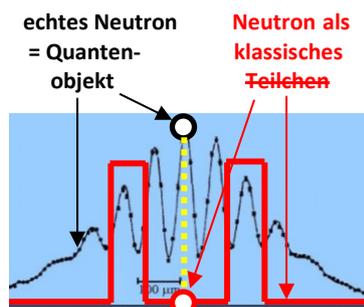
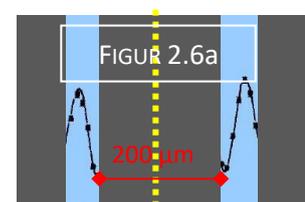
FIGUR 2.5a: PRINZIP NEUTRONENBEUGUNG AM DOPPELSPALT

Auf der Symmetrieachse (gelb in den Figuren 2.5a und 2.5b) gibt es ein Maximum. Der Wellenaspekt ermöglicht es einem Neutron, das in der Flugröhre läuft, sowohl durch den linken als auch durch den rechten Spalt zu fliegen und auf der Symmetrieachse sich konstruktiv zu überlagern. Konstruktive Interferenz gibt es ebenfalls bei $\pm 70\ \mu\text{m}$, wo der Weg durch die eine Spalte genau 1 Wellenlänge länger ist als durch die andere. Bei einer halben Wellenlänge Wegunterschied gibt es Auslöschung, obwohl nur ein Neutron unterwegs ist. Man kann sagen: Ein **einzelnes Neutron interferiert** mit sich selbst!



FIGUR 2.5b: NEUTRONEN-INTERFERENZ

In Figur 2.6a ist im gleichen Massstab wie in Figur 2.5b die Schattenfigur gezeichnet, die das Neutron «sieht»: Der $100\ \mu\text{m}$ dicke Draht auf der Symmetrieachse vom Eintrittsspalt auf die $10\ \text{m}$ entfernte Messebene projiziert, führt zu einem $200\ \mu\text{m}$ breiten Schatten. Wären die Neutronen gewöhnliche, kleine **Teilchen**, dann dürften keine hinter die **Symmetrieachse** gelangen; dort müsste ein **Minimum**, sein!



In der Figur 2.6b ist schwarz nochmals die reale Zählrate mit dem Maximum auf der Symmetrieachse abgebildet. Rot ist zusätzlich dargestellt, wie die Zählrate sein müsste, wenn Neutronen kleine, klassische Körnchen wären: Wert = 0 auf der Symmetrieachse! Weil der Eintrittsspalt eine Breite von $20\ \mu\text{m}$ besitzt, müsste man zwischen 0 und maximal noch Übergänge mit Halbschattenzonen einbeziehen.

FIGUR 2.6b: VERGLEICH ZWISCHEN WIRKLICHEN NEUTRONEN, DIE QUANTENOBJEKTE SIND, UND FIKTIVEN NEUTRONEN (KLASSISCHE TEILCHEN)

Die **quantitative Auswertung** von Zeilingers Daten bestätigt de Broglies Wellenlängen-Gesetz (2.2):

Aus den Figuren 2.5a und 2.5b kann man auf den Winkel zwischen dem Hauptmaximum auf der Symmetrieachse (gelb) und dem 1. Nebenmaximum (grün) schliessen:

$$\tan\alpha_1 = 70 \mu\text{m} / 5 \text{ m} = 14 \cdot 10^{-6} \approx \sin\alpha_1.$$

Für die 1. konstruktive Interferenz muss der Weg durch die rechte Spalte um 1 ganze Wellenlänge λ_{dB} grösser sein als der Weg durch die linke Spalte:

$$\sin\alpha_1 = \lambda_{\text{dB}}/d.$$

Aus den Daten des Experiments erhält man also für die de Broglie-Wellenlänge der Neutronen:

$$\lambda_{\text{dB experimentell}} = d \cdot \sin\alpha_1 = 126 \mu\text{m} \cdot 14 \cdot 10^{-6} = 1.8 \cdot 10^{-9} \text{ m} = 1.8 \text{ nm}.$$

Wenn man andererseits von der Theorie herkommt und die Werte des Neutrons $m = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ und $v = 220 \text{ m/s}$ in de Broglies Gleichung (2.2) einsetzt, erhält man den Wert

$$\lambda_{\text{dB theoretisch}} = h/mv = 6.63 \cdot 10^{-34} \text{ Js} / (1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot 220 \text{ m/s}) = 1.8 \cdot 10^{-9} \text{ m} = 1.8 \text{ nm}.$$

Viele Doppelspaltexperimente mit verschiedenen Quantenobjekten bestätigen den Wellenaspekt der Materie und die de Broglie-Wellenlänge $\lambda_{\text{dB}} = h/mv = h/p$ (2.2)

In Doppelspaltexperimenten prallen freie Quantenobjekte auf undurchdringliche Materie und zeigen ihren Wellenaspekt durch ein Interferenzmuster. Die Quantenobjekte können ganze Biomoleküle sein. Der Wellenaspekt kann aber auch mit teilweise durchdringlichem Material zum Vorschein kommen, wie im nächsten Modul gezeigt wird.

Reflexion: Wir vermeiden hier bewusst den Begriff «Mikroobjekt». Was könnte der Grund dafür sein, in der Quantenphysik nicht von Mikroobjekten zu sprechen?

AKTIVITÄTEN ZU 2.3

AUFGABEN:

2.4) Zum Experiment von Claus Jönsson

2.5) George Paget Thomson bestätigt die de Broglie-Wellenlänge von Elektronen präzise

Ergänzung: M2.6) Zeilingers kalte Neutronen

Ergänzung: M2.7) Geometrische Optik beim Zeilinger-Experiment (2.3.5)

Ergänzung: M2.8) Veränderung beim Zeilinger-Doppelspalt durch Einbau einer «Tor»kamera

EXPERIMENTE:

Von Davisson und Germer zu Elektronenwellen in der Schule

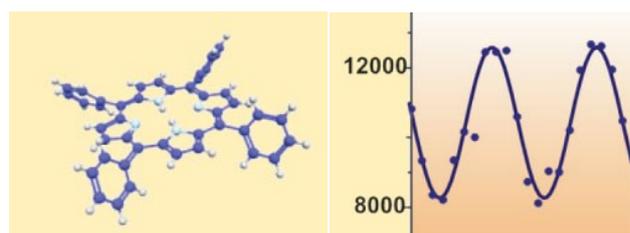
Simulation mit Quantenobjekten am Doppelspalt

NACHDENKEN ÜBER PHYSIK 2: THEORIE UND EXPERIMENT IN DER PHYSIK

BIOGRAPHIE: WIKIPEDIA > Anton Zeilinger > Leben



INTERFERENZ MIT BIOMOLEKÜLEN



M. ARNDT ET AL. DOI:10.1002 PIUZ.200501091

2.4 Bestätigung des Wellenaspekts durch den Tunneleffekt

Etappe ①, 3. Teil: Elektronen, Protonen, Alpha-Teilchen ... können tunneln.

2.4.1 Durch den Tunnel statt über den Berg

Was hat die Berg- und Talbahn mit dem Glasprisma gemeinsam? Bei beiden geht es unter Umständen



nicht weiter! Wenn der Wagen nicht genügend Energie hat, gelangt er nicht über den Berg, sondern rollt ins Tal zurück. Ebenso: Wenn das Licht vom Glas in die Luft soll, wird es an der Hypotenuse des Prismas total reflektiert. Es kann nicht vom optisch dichteren ins dünnere Medium. Daran ändert sich nichts, wenn ein zweites gleichartiges Prisma dahinter gestellt wird (Figur 2.7a).

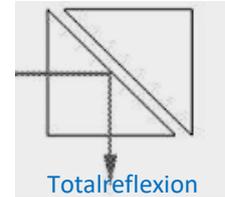


FIG. 2.7a: TOTALREFLEXION

Beim Licht gibt es jedoch eine Möglichkeit hindurchzukommen: den **Tunneleffekt**. Setzt man das zweite Prisma eng genug ans erste, gelangt Licht geradeaus: Tunneleffekt.

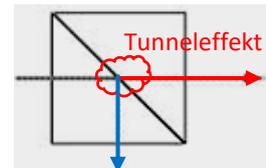
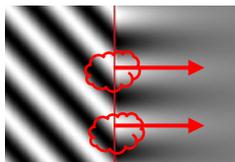


FIG. 2.7b: TUNNELEFFEKT UND TEILREFLEXION

Wenn der Abstand zu einem zweiten Prisma nur noch einige Wellenlängen beträgt (Figur 2.7b), tunnelt ein Teil des Lichts durch die «eigentlich undurchlässige» Luftschicht, die deshalb «verbotene Zone» heisst. Nur der Rest wird gespiegelt. Diese Erscheinung ist eine Folge des Wellenaspekts des Lichts.

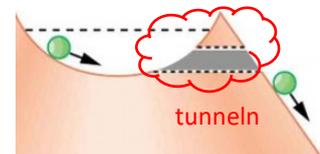
Den Tunneleffekt kann man bei allen Wellen (Licht, Wasser, Schall, Radar ...) beobachten. Bei



FIGUR 2.7c: EIN-DRINGEN IN DIE VERBOTENE ZONE

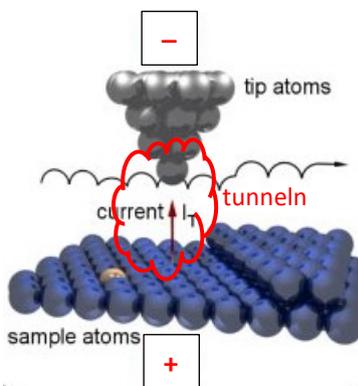
Wasserwellen kann man das Eindringen um etwa eine Wellenlänge in die verbotene Zone fotografieren (Figur 2.7c). Der Effekt tritt auch bei elektromagnetischer Strahlung auf: Auto-UKW-Radio kann man noch ca. 30 m im Tunnelinnern empfangen. Küchen-Mikrowellen sind noch ca. 1 cm ausserhalb der Lochgittertüre nachweisbar. Mit den Augen nicht zu nahe an die Türe!

Gibt es den Tunneleffekt auch bei Materiewellen? – Wenn ein Wagen der Berg- und Talbahn als Quantenobjekte betrachtet wird, müsste die zugehörige de Broglie-Welle durch den «verbotenen Berg» tunneln und der Wagen irgendwie auf die andere Seite gelangen können ... – Wegen der winzigen de Broglie-Wellenlänge alltäglicher Dinge ist so ein Tunneln unmöglich. Plausibel und mit Mikrowellen gut überprüfbar ist, dass das Tunneln von der Dicke der «verbotenen Zone» abhängt. Diese ist für alltägliche Dinge immer viel zu gross. Doch bei den **kleinen Massen** von Elektronen, Protonen usw. kann man den quantenmechanischen Tunneleffekt beobachten und sogar technisch nutzen.



2.4.2 Ein besseres Mikroskop dank Tunneleffekt

Eine Anwendung des quantenphysikalischen Tunneleffekts ist das Raster-Tunnel-Mikroskop (= RTM = scanning tunneling microscope = STM).



FIGUR 2.8a: TUNNELMIKROSKOP

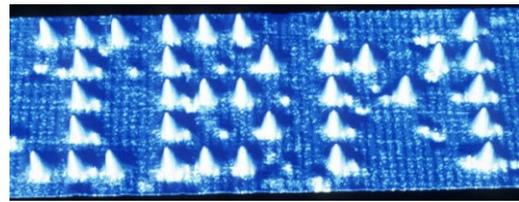
Das Prinzip ist einfach (Figur 2.8a): Eine feine Spitze tastet aus konstanter Entfernung die Oberfläche zeilenweise ab. Die Distanz wird laufend registriert und im Computer zu einem Bild verarbeitet. Zentral ist die **Regulierung des Abtastens** via den konstanten **Tunnelstrom I_T** . Elektronen tunneln bei einer kleinen Spannung durch den verbotenen leeren Raum zwischen Spitze und Probe. In der Praxis ist das RTM komplexer, deshalb haben Heinrich Rohrer und Gerd Binnig von IBM-Forschungslabor in Rüslikon bei Zürich 1986 den Nobelpreis erhalten. Damit man die Spitze des RTM kontrolliert um Bruchteile des Atom-



durchmessers bewegen kann, benützt man Piezokristalle.

Mit winzigen Spannungsänderungen bewirken sie winzige Verformungen für winzige Bewegungen an der RTM-Spitze. –Randbemerkung: Im elektrischen Feuerzeug geschieht der entgegengesetzte Prozess: Mit mechanischem Druck am Piezokristall erzeugt dieser die Spannung für den Funken.

Durch passendes Umpolen kann man sogar Atome umher transportieren. IBM-Forscher haben das Firmenlogo mit grossen Atomen auf eine Trägersubstanz aus kleinen Atomen geschrieben. Das RTM ist sogar eine Werkstätte! Es ist wichtig, sich immer bewusst zu sein, dass der Computer das RTM-Bild generiert. Alles könnte auch rot sein!

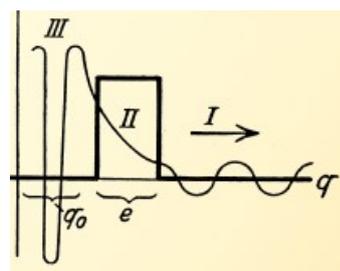


2.4.3 George Gamow erklärt den radioaktiven Alpha-Zerfall

(Ergänzung)

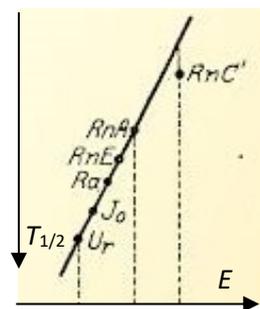
Marie Curie war überrascht, als Ernest Rutherford fand, dass die am leichtesten abschirmbare Strahlung aus ganzen Heliumkernen bestand. Diese flogen mit etwa 5 MeV Energie aus dem Kern, der von einem elektrostatischen «Berg» von etwa 10 MeV umgeben ist. Wären die Alphas klassische Teilchen, müssten sie eingeschlossen bleiben wie Hockey-Pucks durch die Bande des Eisfelds.

1928, als man weder das Neutron noch die Kernkräfte kannte, lernte der junge Russe George Gamow in Göttingen Quantenphysik. Er stellte sich den Atomkern als Tröpfchen vor, das durch die Oberflächenspannung zusammengehalten wird («Haut»). Im Innern von alpha-aktiven Kernen dachte er sich freie Alphas, die etwa mit $0.1c$ hin und her sausten und demnach etwa 10^{21} Mal pro Sekunde versuchten, «die Haut» zu durchbrechen: Teilchenaspekt. Die Alphas zeigen aber auch Wellenaspekt mit einer λ_{dB} von etwa 10^{-15} m, wie wir in 2.2.3 ausgerechnet haben. Im Vergleich dazu ist «die Haut», genauer: der zu überwindende Potentialberg, schmal. Also wird Tunneleffekt auftreten können.



FIGUR 2.8b: TUNNELEFFEKT

Figur 2.8b ist aus der Originalarbeit von Gamow kopiert (Z. für Physik, 1928). Ein kleiner Teil der de Broglie-Welle tunnelt durch den Potentialberg mit der Dicke e und ermöglicht dem Alpha die Flucht. Gamow berechnete auf dieser Basis die Halbwertszeit als Funktion der Energie und verglich sie mit einigen damals bekannten Nukliden. RnA heisst heute Po-218 und besitzt eine Halbwertszeit $T_{1/2}$ von etwa 3 Minuten; Jo heisst heute Th-230 und besitzt eine Halbwertszeit von 75'000 Jahren. Gamow konnte die exponentielle Abhängigkeit von der Zerfallsenergie E erklären. Wir werden im Modul 3 darauf zurückkommen.



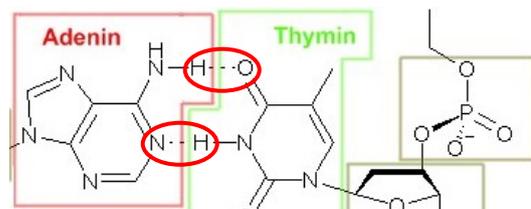
ALPHA-ZERFALL

von 75'000 Jahren. Gamow konnte die exponentielle Abhängigkeit von der Zerfallsenergie E erklären. Wir werden im Modul 3 darauf zurückkommen.

2.4.4 Kein Leben ohne quantenphysikalischen Tunneleffekt!

Die Sonne erzeugt die Energie, dank der wir leben, durch Kernverschmelzung, **Kernfusion**. Protonen verschmelzen aber nur dann zu schwereren Kernen, wenn sie sich trotz Abstossung genügend nahekommen. Die Rechnung zeigt, dass die Fusionswahrscheinlichkeit bei den im Sonneninnern herrschenden Temperaturen durch den Tunneleffekt von 10^{-100} (praktisch unmöglich) auf 10^{-8} (durchaus möglich) ansteigt. Nur dank des Tunneleffekts setzt die Sonne so viel Energie frei, wie das Leben hier braucht.

Im Mesokosmos verursacht der Tunneleffekt **spontane Mutationen** in der Erbsubstanz DNA. Die Figur 2.9 zeigt, wie Adenin und Thymin durch zwei Wasserstoff-Brücken-Bindungen zusammengehalten werden. Die Protonen der Bindungen können mit geringer Wahrscheinlichkeit wegtunneln und dadurch die Erbsubstanz verändern. Meistens wird eine solche Mutation durch Reparaturmechanismen wieder rückgängig gemacht. Das Ergebnis ist gleich wie bei Mutationen, die durch Strahlung oder chemische Reaktionen hervorgerufen werden. Die Mutation kann aber auch stabil werden und sich für das betroffene Individuum schädigend oder – in seltenen Fällen – positiv auswirken.



FIGUR 2.9: TUNNELNDE PROTONEN IN DER DNA

2.4.5 Quantenphysikalischer Tunneleffekt im digitalen Alltag

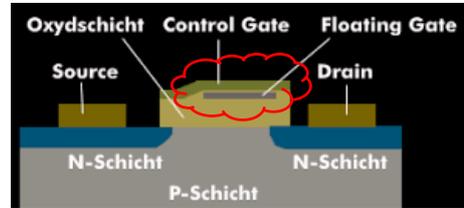
(Ergänzung)



Den Satz «Ohne Strom läuft nichts.» sollte man variieren in «**Ohne Tunneleffekt läuft nichts**», denn es braucht überall Stecker. Und in den Steckern fließen die Elektronen nur dank des Tunneleffekts zwischen den Kristallen der Steckdose und denjenigen des Steckers.

Auch in vielen elektronischen Bauteilen aus halbleitenden Materialien wie Silizium, Germanium usw. ist der Tunneleffekt wichtig, beispielsweise in der Tunnel-Diode.

In den beliebten **Flash-Speichern** ist das 0 oder 1 als elektrische Ladung auf dem «floating gate» gespeichert. Dieses leitende Stück ist von einer isolierenden Oxydschicht = Quarz (SiO₂) umgeben. Beim Ein- und Auslesen der Daten müssen Elektronen durch diese isolierende Schicht tunneln. Ohne Tunneleffekt gäbe es solch bequeme Speicher mit riesigem Inhalt (Terabyte) nicht.

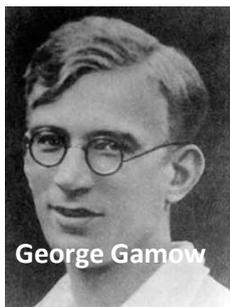


FLASH-SPEICHER-AUFBAU

Reflexion:

Der in 2.4.3 erwähnte George Gamow kreierte 1939 ein Buch über moderne Physik. Er fragte unter anderem, wie wahrscheinlich es sei, dass ein Auto bei einem Unfall durch eine Hausmauer tunneln könne und fand natürlich eine unwahrscheinlich kleine Zahl.

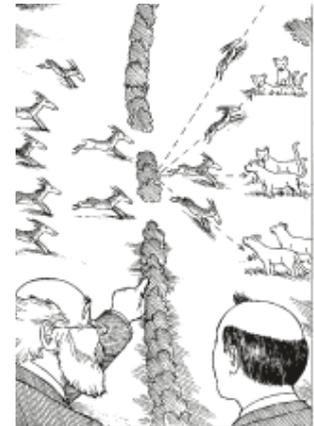
Quantenobjekte beim Durchgang durch einen Doppelspalt veranschaulichte Gamow durch Gazellen beim Durchqueren einer Hecke mit zwei Öffnungen. Löwen «messen» den Ort der Gazellen nach der Hecke.



George Gamow

Anton Zeilinger kommentierte 1999 eine «verbesserte» Neuauflage von Gamows Buch folgendermassen: «It might have been better to retain Gamow's original figures and thus imply that the conceptual picture is outdated.»

Inwiefern ist das Konzept des Bilds veraltet?



AKTIVITÄTEN ZU 2. 4

AUFGABEN:

2.6) Der Tunneleffekt

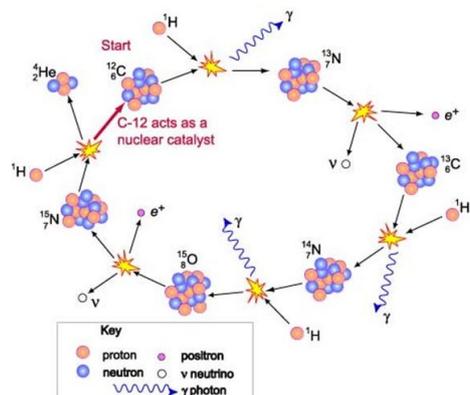
Ergänzung: M2.11) Tunneldiode

EXPERIMENTE:

Tunneleffekt mit Wasser, Licht und Mikrowellen

evtl. Tunneldiode, easy scan RTM, RTM an Universität

BIOGRAPHIE: WIKIPEDIA > George Gamow



KERNFUSION IN DER SONNE

2.5 Schrödingers ψ -Wellen – Eine Entdeckung von ganz ausserordentlicher Tragweite

Etappe 2: Das Atom quantenmechanisch verstehen.

2.5.1 Die Stabilität des Atoms mit der Dualität des Elektrons verstehen

Sicher haben Sie sich unterdessen durch RTM und EM, durch die Interferenzmuster bei Doppelspaltexperimenten und durch den Tunneleffekt von Elektronen, Protonen und ganzen Alphas vom Wellenaspekt der Materie überzeugen lassen. Dieser Wellenaspekt muss sich aber nicht nur bei frei herumfliegenden, sondern auch bei den gebundenen Quantenobjekten bemerkbar machen. An den Kern gebundene Elektronen bilden die Atome, deren Stabilität durch ein besseres Modell als dasjenige von Bohr erklärt werden muss!

Warum sind Atome stabil? – Auf diese Frage kennen wir Antworten von unterschiedlicher Qualität, basierend auf verschiedenen Grundlagen, respektive Vorstellungen:

Klassisch-naive Erklärung: Das teilchenartige Elektron stürzt nicht in den Atomkern, weil es um ein teilchenartiges Proton kreist wie der Mond um die Erde. – Das ist physikalisch falsch, denn das kreisende, beschleunigte Elektron würde elektromagnetisch strahlen, Energie verlieren und abstürzen! 😞

Bohrs Erklärung: Auf stationären Bahnen *darf* das rein teilchenartige Elektron nicht strahlen. – Bohrs Postulat setzt die Gesetze der Elektrizität nur für genau diesen einen Fall, ad hoc, ausser Kraft. 😞 Eine Physik, die nicht immer gilt? Das ist eine unbefriedigende Wissenschaft.

De Broglies Erklärung: Nur Bahnen mit geschlossenen de Broglie-Wellen sind stabil. – Die Wellen liegen in einer Ebene, das Atom aber ist dreidimensional. Es gibt keine physikalische Erklärung dafür, was in de Broglies Wellen schwingt! Rein wellenartige Elektronen sind mysteriös. 😞

Erklärung mit Dualität: Das Elektron ist ein Quantenobjekt. Es zeigt sich nicht nur «körnig», sondern auch «wellig». Im Teilchenaspekt steckt die Ladung, die ins Proton fallen will und dort keinen Raum beansprucht. Im Wellenaspekt steckt die Tendenz, unendlich viel Raum zu beanspruchen.

😊 Die Welle-Teilchen-Dualität, das Sowohl-als-auch des Elektrons, sorgt für das Gleichgewicht. 😊

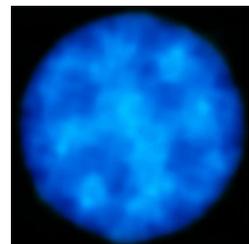
«Das H-Atom ist stabil durch das **Gleichgewicht** zwischen **Aufbauschen** und **Abstürzen**.»

Das Gleichgewicht beim Atom können Sie mit dem Gleichgewicht bei einem **Gasplaneten** vergleichen:

- Die Massenanziehung zieht nach innen und der Gasdruck wirkt nach aussen.
- Durch die Symmetrie entsteht eine Kugel mit einem Gleichgewichtsradius.
- Die Oberfläche ist wegen der Druckschwankungen flauschig.
- **Rotation ist nicht nötig!**

Natürlich ist das Atom kein Gasplanet:

- Beim H-Atom hat es anstatt der vielen Gasteilchen nur ein einziges Elektron. Dieses ist irgendwie im ganzen Volumen verteilt, so dass es «überall und nirgends» ist.
- Die Energie kann im Gas *jeden* Wert haben, die Energiezufuhr ΔE ebenfalls. Das Atom hat Energiestufen und Spektrallinien gemäss Figur 2.3. Energieänderungen müssen *fixe* Werte $\Delta E = E_2 - E_1$ besitzen. Schlussfolgerung: Ein differenzierteres, quantenmechanisches Atommodell ist nötig!



2.5.2 Das wellenmechanische Atommodell Schrödingers

Als Erwin Schrödinger Professor an der Universität Zürich war, beschäftigte er sich auf Anregung von Einstein mit de Broglies vager Vorstellung *d'une onde réelle associée*. Sie regte ihn in den Neujahrs-Skiferien 1925/1926 in Arosa zu einer Reihe von Artikeln unter dem Titel *Quantisierung als Eigenwertproblem* an. In unsere Sprache übersetzt, könnte man schreiben:



«Bestimmung der Energiewerte des Wasserstoffatoms mit Hilfe von abstrakten ψ -Wellen-Schwingungen (Psi-Wellen), die einer neuartigen Gleichung gehorchen.»

ERWIN SCHRÖDINGER, CA 35 JÄHRIG,
ALS ER AN DER UNIVERSITÄT ZÜRICH WIRKTE UND ψ (ER)FAND

Mit unserer Umschreibung taucht eine Reihe von Fragen auf!

- (1) Was ist die physikalische Grundidee hinter den schwingenden ψ -Wellen?
- (2) Welche Eigenschaften haben die ψ -Wellen im H-Atom?
- (3) Was bedeutet dieses « ψ » überhaupt?
- (4) Wie sieht Schrödingers neue Gleichung, die das ψ bestimmt, genau aus?

Die genaue Antwort auf die letzte Frage verschieben wir auf später. Die Frage nach der Bedeutung von ψ wird in 2.6 beantwortet. Die beiden anderen Fragen packen wir jetzt an, können sie aber nur unvollständig beantworten: Wir leiden unter einem Problem, das schon Schrödinger seinem Mathematiker-Kollegen, Hermann Weyl, klagte: *Wenn ich nur mehr Mathematik könnte!* Mangels höherer Mathematik müssen wir uns oft mit Worten, Bildern und Analogien zufrieden geben.

(1) Für die **physikalische Grundidee** können wir vom Gleichgewicht beim Gasplaneten ausgehen, aber statt mit Kräften mit Energien argumentieren: Der Gasdruck stammt von der Bewegung, die mit der kinetischen Energie und dem Wellenaspekt verbunden ist. Der Zusammenhalt stammt von der elektrischen Anziehung, die mit der potentiellen Energie verbunden ist. Schrödingers neue Gleichung sagt:

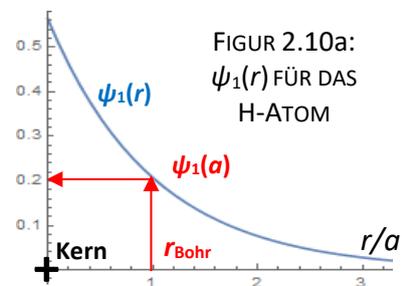
$$\text{kinetische Energie (mit } p \text{ und } \psi) + \text{potentielle Energie (mit } e \text{ und } \psi) = \text{Gesamtenergie (mit } \psi)$$

(1.1) Die neue Gleichung muss de Broglies Idee umfassen: Bei einem mit v **frei** fliegenden Elektron gibt es keine potentielle Energie. Schrödingers ψ -Welle muss in der Ausbreitungsrichtung die de Broglie Wellenlänge h/mv zeigen. Die Ausdehnung quer zur Flugrichtung ist so gross, dass das ψ bei einem Doppelspalt durch beide Spalte gehen und mit sich selbst interferieren kann. Es besteht eine gewisse Verwandtschaft dieser ψ -Welle mit der elektromagnetischen Wolke, die aus der Radioantenne strömt.

(1.2) Bei einem an den Kern **gebundenen** Elektron gibt es potentielle Energie, was die Mathematik verändert. Nun muss die ψ -Welle am Ort bleiben und irgendwie um den Kern herum schwingen. Die ψ -Welle ist eine **stehende Welle**. Weil sich zeitlich nichts ändert, bezeichnen wir eine solche stehende Welle als **Zustand**. In «ächt genialer» (so Einstein) Weise fand Erwin Schrödinger für das H-Atom:

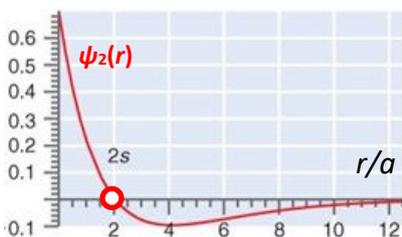
Der Grundzustand des H-Atoms wird beschrieben durch eine kugelsymmetrische Zustandsfunktion, die mit dem Radius r exponentiell abfällt: $\psi_1(r) = C_1 \cdot e^{-r/a}$ ($a = \text{Bohr-Radius}$). (2.3)

In Figur 2.10a ist die Funktion $\psi_1(r)$ dargestellt. Sie entspricht dem stabilen **Grundzustand des H-Atoms**. Zu ihr gehört das Energieniveau E_1 . ψ_1 hat ein Maximum im Atomkern und erstreckt sich exponentiell abnehmend bis ins Unendliche. In der Entfernung des Bohrschen Radius $r_{\text{Bohr}} = a$ beträgt ihr Wert einfach noch $1/e \approx 37\%$ des Anfangswerts C_1 . Der Faktor C_1 hat den Zahlenwert 0.56... Er sorgt dafür, dass in diesem Zustand im ganzen Raum genau 1 zu diesem Kern gehörendes Elektron steckt.



FIGUR 2.10a: $\psi_1(r)$ FÜR DAS H-ATOM

In Figur 2.10b ist die Funktion $\psi_2(r)$ dargestellt. Sie entspricht dem **ersten angeregten Zustand** des H-Atoms. Zu ψ_2 gehört das Energieniveau E_2 . Im Abstand $r = 2a$ ist das Elektron nie, denn es gilt immer $\psi_2(2a) = 0$.

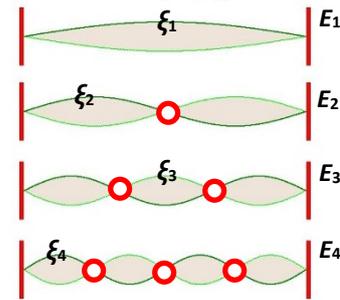


FIGUR 2.10b: $\psi_2(r)$ DES H-ATOMS

Im Raum gehört dazu eine **Knotenkugelfläche**. Beachten Sie, dass der Massstab gedrängter ist als in Figur 2.10a und $\psi_2(r)$ bei $r = 4a$ noch einen grossen Wert besitzt. Der Zustand $\psi_2(r)$ erstreckt sich weiter in den Raum als $\psi_1(r)$. Ebenso höhere angeregte Zustände: $\psi_3(r)$ besitzt zwei Knotenkugeln und das Energieniveau E_3 . usw.

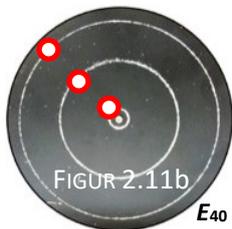
(2) Um diese Knotenkugeln und weitere Eigenschaften der Lösungen ψ_n von Schrödingers Gleichung für das Wasserstoff-Atom zu verstehen, müssen wir – *Wenn ich nur mehr Mathematik könnte!* – die **Analogie** zwischen den abstrakten ψ -Wellen und den von uns wahrnehmbaren Schallwellen benützen. In Schallwellen besitzt die schwingende Masse Bewegungsenergie, und die Schwingung setzt eine elastische Kraft mit potentieller Energie voraus. Das verbindet sie mit den ψ -Wellen.

Schallwellen breiten sich in Luft, Wasser usw. so weit aus, als Platz ist. In **begrenzten** Räumen können sich die neu entstehende Wellen mit den von den Grenzen reflektierten konstruktiv überlagern, wenn die Länge passt. Dann gibt es sogenannte **stehende Wellen**: eindimensional längs einer Saite oder in einem Horn mit null, einem, zwei ... Knotenpunkten  in Figur 2.11a. Auf einem gefüllten Glas oder auf einem Trommelfell gibt es 2 zwei-dimensionale stehende Wellen mit Knotenlinien (Figur 2.11b). In der Luft einer Flöte oder einem Zimmer gibt es dreidimensionale stehende Wellen mit Knotenflächen (Figur 2.11c).



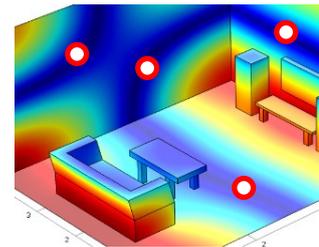
FIGUR 2.11a: STEHENDE WELLEN AUF EINER SAITE MIT 0, 1, 2 ... KNOTEN

(2.1) In Figur 2.11a wird deutlich, dass bereits in einer Dimension unendlich viele Schwingungsformen möglich sind. Zu ihnen gehören die unendlich vielen Energiestufen $E_1, E_2, E_3 \dots E_n$ mit den Quantenzahlen $1, 2, 3 \dots n$. Will man die Saite oder die Luft im Alphorn zwingen, in ξ_2 statt in ξ_1 zu schwingen, muss man genau die Energiedifferenz $\Delta E = E_2 - E_1$ zuführen. In diesen Fällen führen die zu den Energiedifferenzen gehörenden Frequenzen zu den Intervallen der Naturtonleiter: $E_2 - E_1 \rightarrow$ Oktave; $E_3 - E_2 \rightarrow$ Quinte; $E_3 - E_1 \rightarrow$ zweite Oktave ...



(2.2) Weiter geht es ins **Zweidimensionale** wie bei schwingenden Platten oder auf Trommelfellen. In Figur 2.11b haben wir das zweidimensionale Pendant zu ξ_4 der Figur 2.11a. Die drei weissen Kreise entstehen dort, wo sich das Trommelfell nicht bewegt, auf den sogenannten Knotenlinien, dem Pendant zu den drei Knotenpunkten. Dazu gibt es die Energie E_{40} . Es sind $n - 1$ Kreise mit der Energie E_{n0} denkbar. Es gibt aber auch kompliziertere Schwingungsformen, wie in \rightarrow 2.5.3 besprochen wird.

(2.3) Noch grösser ist die Vielfalt in **drei** Dimensionen. Wenn Sie im Bad singen, stellen Sie fest, dass sich gewisse Tonhöhen besonders leicht erzeugen lassen. Dies sind Anzeichen von stehenden Wellen der Badzimmerluft. Der tiefste Ton gehört zur Grundschwingung, dem **Grundzustand**, mit der tiefsten Energie E_{100} . Höher sind die Obertöne mit E_{200} usw. In einem Würfel gibt es dreimal unendlich viele Varianten E_{mnp} . Wenn die Akustikerin einen neuen Konzertsaal plant, muss sie die Schwingungen möglichst genau vorherberechnen und unerwünschte mit passenden Massnahmen dämpfen. Figur 2.11c zeigt Schall im Computer-Zimmer.



FIGUR 2.11c: STEHENDE WELLEN IN EINEM COMPUTER-ZIMMER



Das akustische Analogon zum H-Atom ist **Schall in einem kugelförmigen Badezimmer** mit einer weichen, bis ins Unendliche reichenden Wand. Beide, Schall und Elektron, besitzen kinetische Energie. Beide, die Wand und die elektrischen Kräfte, besitzen potentielle Energie. Auch die Geometrie ist gleich: Kugelsymmetrie.

Es gibt jedoch neben kleineren auch einen wesentlichen Unterschied: Anstelle der variablen Lautstärke ist die Grösse C_1 unveränderlich vorgegeben, denn wir haben genau ein Elektron.

Für die ψ -Wellen in kugelsymmetrischen Umgebungen lieferte Schrödingers Gleichung unendlich viele verschiedene Lösungen $\psi_n(r)$:

$$\psi_1(r) = C_1 \cdot e^{-r/a} \quad \text{und} \quad \psi_2(r) = C_2 \cdot (2 - r/a) \cdot e^{-r/2a} \quad \text{und} \quad \psi_3(r) = \dots \quad \text{usw.}$$

Das Wichtigste für Schrödinger waren aber die Energiestufen E_n , die zu jedem ψ_n gehören. Es waren die gleichen, die Bohr und de Broglie gefunden hatten und die zu den Spektrallinien passten:

$$E_n = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{-1}{8} \frac{me^4}{\epsilon^2 \hbar^2} \quad \text{mit der Energie-Quantenzahl } n = 1, 2, 3 \dots \quad \text{😊 Nicht auswendig lernen! 😊}$$

Der Erfolg mit dem H-Spektrum rechtfertigte Schrödingers neue Gleichung und das neue ψ . Schrödinger war zuerst nicht an den ψ , sondern nur an den E_n interessiert.

(3) Die Bedeutung der ψ -Wellen können wir nur schrittweise erkunden (mehr in \rightarrow 2.6). Sie war selbst ihrem Erfinder zuerst nicht klar! Das zeigt sich in seiner Bezeichnung «Feldskalar»: Das ψ erstreckt sich über den ganzen Raum, daher «Feld», und es ist eine skalare Grösse wie die Temperatur. Auf eine Anfrage antwortete Schrödinger dem Vater der Quantentheorie nach Berlin:

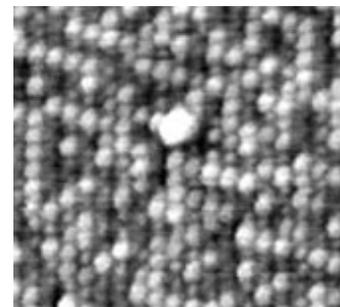
Hochverehrter Herr Geheimrat Planck.

(...) Ich meine selbstverständlich nicht, dass nun alles wieder mit Mechanik zu erklären sei, dass etwa jene ψ -Schwingungen Massenschwingungen im Sinne der gewöhnlichen Mechanik sind. Im Gegenteil: sie oder etwas ihnen Ähnliches scheint aller Mechanik und Elektrodynamik zugrunde zu liegen.

Gar Manches rechnet Erwin schon
Mit seiner Wellenfunktion.
Nur wissen möcht' man gerne wohl
Was man sich dabei vorstell'n soll.

Sicher war also anfangs nur, dass die ψ -Schwingungen *nichts Materielles* sind. Weil eine positive Bedeutungszuschreibung, eine Interpretation, fehlte, ist es nicht erstaunlich, dass der ETH-Postdoc Erich Hückel das abgedruckte Spottgedicht über das Vorgehen des Professors an Universität schrieb.

Heute haben wir es besser: Mit dem Raster-Tunnel-Mikroskop (\rightarrow 2.4.1) kann man Bilder von einzelnen Atomen gewinnen. Eine Forschungsgruppe an der TU Wien erzeugte das Bild nebenan von einer Platin-Nickel-Legierung, wie sie in Katalysatoren von Bedeutung sind. Der grosse Fleck ist unbekannter Schmutz. Die kleinen hellen Flecken sind Ni-Atome, die kleinen dunklen Flecken sind Pt-Atome. Beide Atomsorten sind offensichtlich genau so kugelig, wie die Ergebnisse ψ von Schrödingers Berechnungen für das H-Atom. Weil die RTM-Spitze auf die elektrische Ladungsdichte reagiert, müssen wir davon ausgehen, dass das ψ mit der Ladungsverteilung zu tun hat.



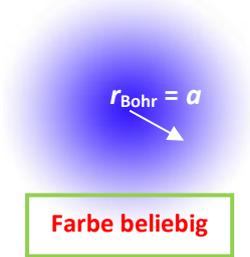
RTM-BILD: PT-NI-KRISTALL

2.5.3 Wie soll man sich das H-Atom vorstellen? Wo ist das Elektron?

Die Atome erscheinen im RTM als unscharfe, verschwommene Kugeln ohne Oberfläche nicht wegen mangelhafter Geräte, sondern als Folge des Wellenaspekts der Elektronen. Beim H-Atom stimmt das Bild mit der Information der Zustandsfunktion $\psi_1(r)$ überein. Beide erstrecken sich bis ins Unendliche. Wir sagen deshalb etwas blumig:

Atome sind «flauschig». Sie besitzen keine scharfe Aussengrenze.

Diese Erkenntnis muss man beim Zeichnen berücksichtigen. Die natürliche Unbestimmtheit der Atom-Oberfläche ist im Computer-generierten Bild eines H-Atoms von Figur 2.12.a zutreffend dargestellt. Das Atom hat keine glatte Oberfläche. Man kann zwar indirekt einen Radius z. B. aus Atomabständen beim Röntgen von Kristallen berechnen. Deshalb findet man in Tabellenwerken oft mehrere unterschiedliche Werte für die Grösse eines Atoms, z. B. für Silber die zwei Werte: $r_{\text{kovalent}} = 153 \text{ pm}$ und $r_{\text{Atom}} = 144 \text{ pm}$.

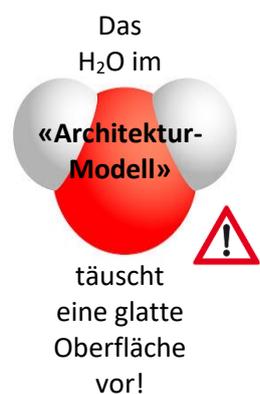


Farbe beliebig

FIGUR 2.12a:
COMPUTER-BILD
EINES H-ATOMS

wirkt das Elektron im $\psi_1(r)$ -Zustand bei $r = 0$, also im Proton des H-Atoms, respektive im Kern grösserer Atome.

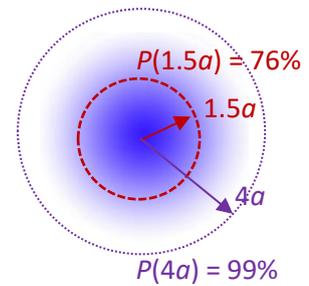
Leider werden die Atome und Moleküle im materiellen Kalottenmodell und in vielen Büchern und Animationen mit genauen Oberflächen und spiegelnd dargestellt: Bei solchen «Architektur-Modellen» stimmen nur die Grössenverhältnisse der Atome und die Winkel!



Wegen ihres Wellenaspekts sind die Elektronen manchmal hier und manchmal dort. Sie sind nie mit Sicherheit an einer bestimmten Stelle anzutreffen. Für sie gibt es keinen Fahrplan in der Art der «Fahrpläne für Planeten» der Astronomie oder von «Fahrplänen für Satelliten» für TV-Übertragungen.

Für Elektronen und andere Quantenobjekte gibt es nur Schrödingers Zustandsfunktion ψ . Mit ihr kann man Wahrscheinlichkeiten berechnen:

- Man findet, dass das Elektron innerhalb einer Kugel
- der Grösse $1.5a$ mit $P = 76\%$ Wahrscheinlichkeit,
- der Grösse $4a$ mit $P = 99\%$ Wahrscheinlichkeit anzutreffen ist
- usw.
- Erst in einer unendlich grossen Kugel findet man es mit $P = 100\%$!

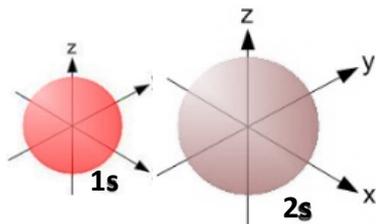


FIGUR 2.12b:

WAHRSCHEINLICHKEIT BEIM H-ATOM
ORBITALE SIND FLAUSCHIG!

«DAS ELEKTRON IST ÜBERALL UND NIRGENDS».
Es ist überall mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit, aber nirgends mit Sicherheit anzutreffen!

Es gibt keine materiellen Schalen, und der Bohrsche Radius ist nur ein Indiz für die Grösse des Atoms, aber es gibt verschieden grosse H-Atome in den verschiedenen Zuständen:

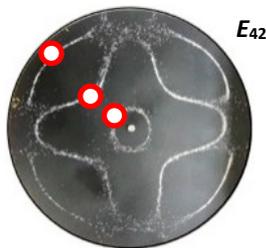


FIGUR 2.12c: 1S UND 2S-ORBITAL
(SIE SOLLTEN FLAUSCHIG SEIN.)

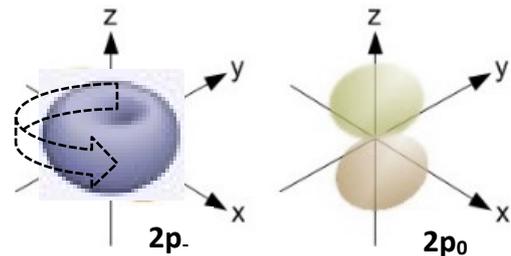
- Im $\psi_1(r)$ -Zustand, der in der Chemie als 1s-Zustand bezeichnet wird, besitzt das Elektron eine geringe Energie E_1 und ist am kleinsten. Dieser Zustand heisst Grundzustand.

- Im $\psi_2(r)$ -Zustand, der in der Chemie als 2s-Zustand bezeichnet wird, besitzt das Elektron eine grössere Energie E_2 und benötigt mehr Platz. Dieser Zustand heisst 1. angeregter Zustand.

Im Innern hat der $\psi_2(r)$ -Zustand eine Knotenkugel, eine Menge von Orten, wo das Elektron nie anzutreffen ist.



- Im $\psi_3(r)$ -Zustand, der in der Chemie als 3s-Zustand bezeichnet wird, besitzt das Elektron eine noch grössere Energie E_3 und benötigt noch mehr Platz usw.



Vergleich von Akustik und Atomphysik: So wie eine Kreisplatte Schwingungen ausführen kann, bei denen die Kreissymmetrie gebrochen ist, gibt es auch ψ -Zustände des Atoms, bei denen die Kugelsymmetrie fehlt: 2p-Zustände usw. Auch sie sollten flauschig gezeichnet sein.

AKTIVITÄTEN ZU 2.5

AUFGABEN:

- 2.7) Emission und Absorption
- 2.8) Der 2s-Zustand des Wasserstoff-Atoms
- 2.9) Das $2p_z$ -Orbital in verschiedensten Darstellungen
- 2.10) Elektronen im Grundzustand wirbeln nicht um den Kern.

EXPERIMENTE: -

BIOGRAPHIE:

Erwin Schrödinger



ERWIN SCHRÖDINGER ALS MATURAND

2.6 Wo ist das Elektron? – Die richtige Antwort auf die falsche Frage heisst «im Zustand ψ ».

Etappe ③: Der Zufall kommt ins Spiel.

2.6.1 Max Borns Wahrscheinlichkeitsinterpretation von Schrödingers ψ

«Nur wissen möcht' man gerne wohl, was man sich dabei vorstell'n soll.» Schrödinger glaubte anfänglich, der Teilchenaspekt des Elektrons würde komplett in seiner ψ -Welle aufgehen. Er dachte, Teilchen könnten als Wellenpakete dargestellt werden. Aber jedes endliche Paket ist eine Mischung von Einzelwellen unterschiedlicher Wellenlänge. Unterschiedliche de Broglie-Wellenlängen eines Objekts mit Masse m bedeuten unterschiedliche Geschwindigkeiten: Das Wellenpaket «zerfließt», «sein» Teilchen läuft auseinander. Ein Wellenpaket ist kein allgemein gültiges Bild für ein Quantenobjekt!



Wo steckt eigentlich der Teilchenaspekt in Schrödingers Wellen? Max Born sah die Herausforderung.



Max Born

A way had to be found for reconciling particles and waves, sagte er später. Dieser Weg führte über die Wahrscheinlichkeit und brauchte Mut. Damals wie heute wünschten sich viele lieber Sicherheit statt Wahrscheinlichkeit!

Born hat die Wahrscheinlichkeit im gleichen Umfeld angetroffen, wo sie uns bei der Bestätigung des Wellenaspekts begegnet ist, bei Streuexperimenten. Otto Stern, damals Borns Kollege in Göttingen, arbeitete mit Molekularstrahlen, schoss also ganze Moleküle auf irgend etwas, analog wie Davisson und Germer ihre Elektronen (→ 2.3). Bereits im Sommer 1926 fand Born:

Die Stossvorgänge haben nicht nur die überzeugendsten experimentellen Beweise für die Grundannahmen der Quantentheorie geliefert, sondern scheinen auch geeignet, Aufklärung zu geben über die physikalische Bedeutung der sogenannten 'Quantenmechanik'.

In seiner Arbeit fand Born nicht nur die **Bedeutung von Schrödingers ψ** , sondern er prägte auch den neuen Begriff «Quantenmechanik», den er noch in Anführungs- und Schlusszeichen setzte. Er argumentierte folgendermassen:

- (1) Heisenberg, Jordan und er hätten zuerst die Auffassung vertreten, dass *eine exakte Darstellung der Vorgänge in Raum und Zeit überhaupt unmöglich sei (...)*
- (2) *Schrödinger auf der anderen Seite scheint den ψ -Wellen eine Realität von der selben Art zuzuschreiben, wie sie Lichtwellen besitzen. (...) Keine dieser beiden Auffassungen scheint mir befriedigend.*
- (3) *Ich [Born] möchte versuchen, hier eine dritte Interpretation zu geben und ihre Brauchbarkeit an den Stossvorgängen zu erproben. Dabei knüpfe ich an eine Bemerkung Einsteins über das Verhältnis von Wellenfeld und Lichtquanten an. (...) Dieses 'Gespensterfeld' bestimmt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Lichtquant (...) einen bestimmten Weg einschlägt.*

Einsteins Bemerkung zur Situation beim Licht geht von der Idee aus, dass die transportierte Energie einerseits durch das Quadrat der elektrischen Feldstärke E^2 gegeben ist (Wellenaspekt) und andererseits durch die Anzahl Lichtquanten (Teilchenaspekt). Einstein bezeichnet nun die elektrische Feldstärke E als das Gespensterfeld, welches die Lichtquanten führe.

Dabei ist es in der Quantenphysik der Materie lernpsychologisch umgekehrt zu der des Lichts:

- Beim Licht ist das Feld E schon etabliert und kein «Gespensterfeld», aber die Teilchen, die Lichtquanten, sind neu.
- Bei der Materie ist das Feld ψ neu und deshalb ein «Gespensterfeld», aber die Teilchen, die Elektronen, Neutronen usw., sind schon lange etabliert.

In beiden Fällen ist **das Quadrat** wichtig.

Bornsche Regel \Leftrightarrow Wahrscheinlichkeitsinterpretation:
Die Wahrscheinlichkeitsdichte, ein Quantenobjekt bei x zu finden, wird mit ψ^2 berechnet.
 $w(x) = \psi^2(x)$ (2.4)

Wir haben die Bornsche Regel beim H-Atom in den Figuren 2.12 bereits benützt. Genau genommen ist jede Zeichnung eines H-Atoms, jedes Orbital, eine Darstellung der Wahrscheinlichkeitsdichte des Elektrons und keine Zeichnung von ψ -Wellen.

Wir erläutern die Bornsche Regel in Figur 2.13a anhand einer idealisierten Version von Zeilingers Neutronenexperiment, einem elastischen Stoß von Neutronen mit einem Doppelspalt.

(1) In der **Theorie** ist der Zustand des Neutrons nach dem Stoß durch die Summe der «Gespensterfelder» $\psi_{\text{nach}} = \psi_1 + \psi_2$ zu **berechnen**.

$\psi_{\text{nach}} = \text{maximal}$, wenn beide, ψ_1 und ψ_2 , gleichzeitig entweder maximal oder minimal sind.

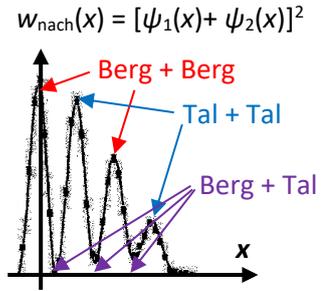
$\psi_{\text{nach}} = 0$, wenn sich ψ_1 und ψ_2 gerade aufheben:
Wellenberg + Wellental = nichts; $+A + (-A) = 0$.

(2) Im **Experiment** kann man die Verteilung der Wahrscheinlichkeit pro Messpunkt, die Wahrscheinlichkeitsdichte $w(x)$, **messen**.

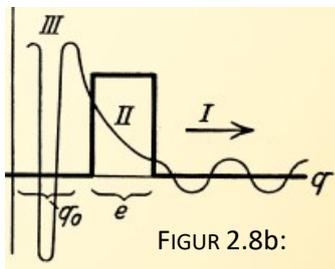
(3) **Borns Regel** verbindet die Theorie ψ_{nach} mit dem Experiment $w(x)$ durch Quadrieren:

$$w_{\text{nach}}(x) = [\psi_{\text{nach}}]^2 = [\psi_1(x) + \psi_2(x)]^2$$

Borns Regel erfasst damit den **Teilchenaspekt in Schrödingers ψ -Wellen**. Die Wahrscheinlichkeitsinterpretation von ψ ist ebenso genial wie die Verschmelzung von Raum und Zeit in die vier Dimensionen.



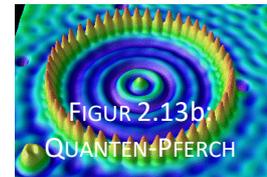
FIGUR 2.13a: BORN'S REGEL VERBINDET DIE WELLE DER THEORIE MIT DEM TEILCHEN DER MESSUNG



FIGUR 2.8b:

Wie ist nun Borns Regel beim Tunneleffekt anzuwenden? Gamows Kurve in Figur 2.8b deutet ein zusammengesetztes ψ an. Die Wahrscheinlichkeit, das Alpha im Bereich III zu finden, ist hoch; die Wahrscheinlichkeit, das Alpha im Bereich I zu finden, ist gering. Die Wahrscheinlichkeit, dass es von III nach I gelangt, ist ebenfalls klein: Es benötigt typisch 10^{21} Versuche. Hier ändern sich die Zahlen in III und I im Verlaufe der Zeit. Gamows Intuition hat mit dem Pfeil die Zeit zusätzlich ins Spiel gebracht. Zeichnen Sie ψ^2 selber in die Figur!

Man könnte meinen, die Darstellung eines atomaren Pferchs in Figur 2.13b zeige ein Bild der stehenden ψ -Welle eines eingeschlossenen Elektrons. Die mit einem RTM generierte Abbildung ist aber das Ergebnis einer Messung und stellt damit eine **Wahrscheinlichkeitsverteilung** $w(x,y)$ aber keine ψ -Welle dar. Das Minimum von w ist nie negativ, sondern nur $w = 0$. Wir bilanzieren:



FIGUR 2.13b: QUANTEN-PFERCH

Eine ψ -Welle ist eine «Wurzel aus Wahrscheinlichkeitsdichte»-Welle.



Eine ψ -Welle ist abstrakt.



Eine Wahrscheinlichkeitsdichte-Welle kann man mit einer Virusdichte-Welle veranschaulichen...

2.6.2 Hitziger Streit zwischen Physikern

Zufälliges Geschehen war vom radioaktiven Zerfall bekannt, störte aber nicht, weil die noch unbekanntes Gesetze des Atomkerns dies wohl später erklären würden. In der Atomhülle war es anders. Einstein schrieb im April 1924 an Born: *Bohrs Meinung über die [Licht-] Strahlung interessiert mich. Aber zu einem Verzicht auf die strenge **Kausalität** [jede Wirkung hat eine Ursache] möchte ich mich nicht treiben lassen, bevor man sich nicht noch ganz anders dagegen gewehrt hat als bisher. Der Gedanke, dass ein einem Strahl ausgesetztes Elektron aus freiem Entschluss den Augenblick und die Richtung wählt, in der es fortspringen will, ist mir unerträglich. Wenn schon, dann **möchte ich lieber Schuster oder gar Angestellter einer Spielbank sein als Physiker.***

Es erstaunt nicht, dass die Wahrscheinlichkeitsinterpretation der ψ -Wellen Kopfzerbrechen und sogar Streit verursachte. Born berichtet über einen Austausch mit Schrödinger:

*Sie [die neuen Ideen] machten ihn wütend, weil er das nicht wollte. Wir hatten eine heftige Diskussion. Der Grund war die Rolle des Zufalls. In Borns Worten: Die [von mir] vorgeschlagene Theorie [entspricht] **nicht der Folgerung der kausalen Bestimmtheit des Einzelereignisses.** Kausalität (lateinisch *causa* = Ursache) ist die direkte Beziehung zwischen Ursache und Wirkung, ist eine grundlegende Annahme der klassischen Physik. Die Quantenphysik jedoch zeigt:*

Die Kausalität, die Abfolge von Ursache und Wirkung, gilt im Innersten der Natur nicht.

2.6.3 Bilder von bewegten Quantenobjekten

Schrödingers Hoffnung, der Teilchenaspekt würde komplett in der ψ -Welle aufgehen, hatte sich zerschlagen: Elektronen, Neutronen, He-Atome, C₆₀-Moleküle usw. sind ebenfalls Quantenobjekte. Sie zeigen sowohl Teilchenaspekt ($m, e \dots$) als auch Wellenaspekt (λ_{dB}). Das Sowohl-als-auch von «Körnigkeit» und «Welligkeit» ist Licht und Materie gemeinsam. Es gibt aber einen wesentlichen Unterschied zwischen den «Bausteinen der Welt» (Elektron, Proton usw.) und den «Klebstoffen der Welt» (Photon, Gluon usw.): Die Bausteine besitzen eine träge Masse ($m > 0$) und sind immer langsamer als das Licht ($v < c$). Für sie gilt die Schrödinger-Gleichung. Für Klebstoffe respektiv Kraftvermittler wie das Photon gilt $m = 0$ und $v = c$ und eine andere Gleichung.

Wie wir beim Licht erkannt haben, ist Anschaulichkeit kein Wesenszug der Natur, sondern ein Bedürfnis der Menschen. Orbitale als Bilder der Wahrscheinlichkeitsdichte von **gebundenen** Elektronen sind erlaubt. Aber Bilder mit **bewegten** Quantenobjekten wie den Lichtquanten in der Halbe-Halbe-Lampe irritieren. Ebenso irritiert die Quanten-Skifahrerin von Figur 2.14a, die das Verhalten von Materie am Doppelspalt darzustellen versucht. Sie erscheint paradox: Sie ist «teilchenartig», dann «wellenartig», dann wieder «teilchenartig». **So** ist Materie in Elektronen, Neutronen, Atomen, Molekülen usw. **nicht!** In Figur 2.14a hat es physikalische Fehler:

① Quantenobjekte können nur betrachtet werden, wenn Licht auf sie gefallen und an ihnen gestreut worden ist. Beim Betrachtungsvorgang werden die betrachteten Objekte aber verändert. ② Quantenobjekte hinterlassen keine Spuren, weder im Schnee noch sonst irgendwo, ohne gestört worden zu sein.

③ Wenn man beim Quantenobjekt herausfinden könnte, durch welchen Spalt es gegangen ist, hätte man seinen Zustand ψ derart verändert, dass es seinen Wellenaspekt verloren hätte und zu einem anderen Quantenobjekt, einem quasi klassischen Teilchen ④ geworden wäre. Das scheint im ersten Moment unglaublich, doch es ist so. Ein Experiment, das dies zeigt, wird in → 3.1.4 vorgestellt.

In 1.7 hatten wir Richard Feynmans Aussagen über Quantenobjekte auf das massenlose Licht bezogen. Wir übertragen sie folgendermassen auf Elektronen und andere Quantenobjekte mit $m > 0$:



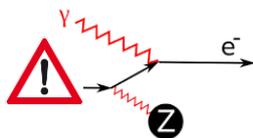
FIGUR 2.14a: QUANTEN(?) -SKIFAHRERIN



FIGUR 2.14b: QUANTEN-SKIFAHRERIN!

(1) «Quantum objects are neither.» – Aber: «Quantum objects are like either.»
 (2) The 'paradox' is only a conflict between reality and our feeling of what reality 'ought to be'.

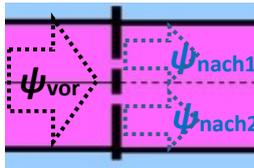
Wenn wir also zur Erläuterung von Experimenten usw. **mit Bildern** arbeiten, müssen wir **vorsichtig** sein und möglichst abstrakt bleiben. Wir dürfen keine Paradoxa konstruieren, die es in der Natur nicht gibt! Und die Bilder müssen den Unterschied Baustoff / Klebstoff repräsentieren.



Wir überprüfen deshalb die Darstellung des Photoeffekts in Figur 1.5 von Modul 1: Beim Licht steckt der Wellenaspekt in der Wellenlinie γ und der Teilchenaspekt im e^- . Bei einem Quantenobjekt mit Masse wie dem Elektron besteht die Darstellung analog aus dem Symbol $e^-, n, p^+ \dots$ und einem Pfeil.

Diese Darstellung, die auch in der Forschung benützt wird, weist leider nicht auf den Wellenaspekt hin. Der Impulspfeil führt uns in Versuchung, das Quantenobjekt auf einer Bahn zu sehen und das Wellige, Ausgedehnte, Nicht-Lokale zu vergessen.

Eine allgemein benutztes Darstellungssymbol für bewegte Quantenobjekt mit Ruhemasse gibt es nicht. Wir schlagen eine ausgedehnte Form vor, die wir an zwei Beispielen illustrieren:



DOPPELSPALT

Man kann die Ausdehnung und Dualität mit einem **dicken Pfeil plus Zustandssymbol** kennzeichnen. Das Geschehen am Doppelspalt (vgl. Figur 2.13a) könnte symbolisch unter Zuhilfenahme der Zustandsfunktionen ψ_{vor} und ψ_{nach1} und ψ_{nach2} wie nebenan dargestellt werden. Die Erhaltung der Anzahl Objekte verlangt für die aufsummierten Wahrscheinlichkeiten P :

$$P_{\text{vor}} = 1 = P_{\text{nach1}} + P_{\text{nach2}} = 0.5 + 0.5 = 1 = P_{\text{nach}}$$

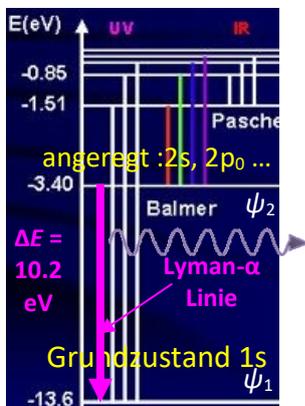
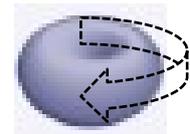
Klar ist, was mit dem $\psi_{\text{nach1}} + \psi_{\text{nach2}} = \psi_{\text{nach}}$ im Moment geschieht, in dem ein Zähler KLICK macht: Das Neutron wechselwirkt intensiv mit einem Bor-Atomkern, wodurch sein ψ_{nach} in **ein anderes $\psi_{\text{Zähler}}$** umgewandelt wird. Dieses $\psi_{\text{Zähler}}$ ist lokalisiert, denn der Zähler misst an der Stelle x . – Das ist jedoch kein Beweis dafür, dass das Neutron auch vorher als lokalisiertes, kleines Teilchen durch den einen oder den anderen Spalt geflogen wäre. Die gleiche Überlegung gilt auch für Photonen, bei denen der KLICK-Mechanismus z. B. eine Photoschicht ist.



2.6.4 Mit ψ den «Quantensprung» als Zustandsänderung verstehen.

Das Wort «Quantensprung» wird in den Medien zur Kennzeichnung von plötzlichen und grossen Entwicklungen benützt. Seine ursprüngliche Bedeutung ist ganz anders, nämlich die einer sprunghaften Veränderung eines Atoms unter Aussendung einer winzigen Energieportion, eines Lichtquants. Gäbe es nur die Grundzustände von Atomen usw., wäre zwar alles stabil, aber es könnte sich auch nichts verändern. Wichtig sind die vielen angeregten Zustände der Systeme. Zwischen ihnen untereinander und mit dem Grundzustand kann es Zustandsänderungen geben.

Interessant sind die vielen Zustände mit Drehimpuls, die in Modul 3 genauer besprochen werden. Z. B. ist nebenan ein H-Atom im $2p_+$ -Zustand dargestellt. Seine Energie E_2 stimmt mit derjenigen des $2s$ -Zustands überein. Je höher die Anregung, desto mehr Varianten mit Drehimpuls sind möglich. Auf der 3. Energiestufe sind das die Orbitale $3d_{+2}, 3d_{+1}, 3d_0, 3d_{-1}, 3d_{-2}$, alle mit der Energie E_3 .



FIGUR 2.15: EMISSION IM H-ATOM - ABSTRAKT

In Figur 2.15 sind die untersten Energiestufen des H-Atoms in der Einheit Elektronvolt (eV) dargestellt. Zum Grundzustand $1s$ ($\psi_1, n = 1$) gehört die Energiestufe $E_1 = -13.6$ eV. Bei den Zuständen $2s$ oder $2p$ ($n = 2$) ist $E_2 = -3.40$ eV usw. Zuoberst dieser unendlich vielen Energiestufen ist die Energie $E_\infty = 0$. Dann ist das Elektron frei und das Atom ionisiert. Energien zwischen den Stufen entsprechen instabilen Zuständen. Die Energie-Werte sind negativ, weil man Energie aufwenden muss, wenn man das Elektron ins Unendliche entfernen will.

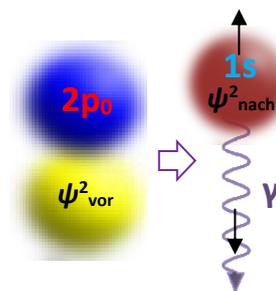
Ein Wechsel zwischen zwei stabilen Zuständen ist möglich. Dann wird **der** Energieunterschied als Licht ausgesandt oder verschluckt gemäss Einsteins $E_{\text{nachher}} - E_{\text{vorher}} = hf$: Emissions-, respektive Absorptionslinie mit f und λ . Das Atom wechselt vom Zustand ψ_{vorher} in den Zustand ψ_{nachher} .

Wir betrachten einen Übergang eines angeregten H-Atoms von $n = 2$ nach $n = 1$. Geht es vom angeregten Zustand mit der Energie $E_2 = -3.40$ eV in den Grundzustand mit $E_1 = -13.6$ eV über, strahlt es die Energie $\Delta E = +10.2$ eV in Form von ultraviolettem Licht ab (Lyman- α Linie):

$$\lambda = hc / \Delta E = 121 \text{ nm}; f = E/h = 1.7 \text{ PHz.}$$

Bei solchen Prozessen müssen Energie-, Impuls- und Drehimpulserhaltungssatz wie in der klassischen Physik erfüllt sein. Daher bewegt sich das $1s$ -Atom in Figur 2.16b nach oben, während das Lichtquant γ mit dem Impuls $p = h/\lambda$ nach unten wegfliegt.

Randbemerkung: Auch in der Quantenphysik gilt, dass eine beschleunigte Ladung Strahlung aussendet. Sie stellen fest, dass die Form des $2p_0$ -Orbitals an den Radiosender von 1.1 erinnert.



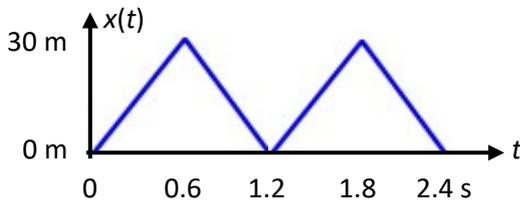
FIGUR 2.16: $2p_0 \rightarrow 1s$

2.7 Klassische Mechanik und Quantenmechanik: ein direkter Vergleich (Ergänzung)

Dass die Mechanik hinter Bohrs Atommodell durch eine bessere ersetzt werden muss, hat uns zur Quantenmechanik geführt. Diese muss auch ausserhalb der Atome gelten. Wir betrachten hier gebundene Objekte, einmal nach der alten und einmal nach der neuen Mechanik:

2.7.1 Klassische Objekte in einem Potentialtopf

(1) Nehmen wir einen Puck auf einem Eishockeyfeld. Unter idealen Bedingungen könnte er praktisch



FIGUR 2.17: WEG-ZEIT-GESETZ $x(t)$

ungebremst über 30 m zwischen den Banden hin- und herfliegen. Er könnte eine Geschwindigkeit von 50 m/s erreichen und dabei eine Bewegungsenergie von 20 J besitzen.

Der Puck ist ein klassisches Objekt und die Banden bilden unseren Potentialtopf, der nur eine Dimension, die Breite $b = 30$ m, besitzen soll. Wir können das Ganze mit einer schnellen Kamera verfolgen und

erhalten das Weg-Zeit-Gesetz von Figur 2.17. Dabei ist der Puck zu jeder Zeit an einem bestimmten Ort und kann jede beliebige Geschwindigkeit, also jeden Impuls respektive jede Energie besitzen. Der Puck kann auch ruhen: $x = 0$ für alle Zeiten t .

(2) Alternativ können wir uns ein einzelnes Helium-Atom vorstellen, dem ein Vakuumbehälter der Grösse 3 dm zur Verfügung steht, in dem es hin- und herpendelt, genau gleich wie der Puck.

(3) Nun betrachten wir eine winzige Struktur, einen sogenannten Quantenpunkt (quantum dot). Dank Nanotechnologie kann ein Topf mit verschiedenen Breiten b hergestellt werden, was zu den verschiedenen Farben führt, die man in der Figur sieht.

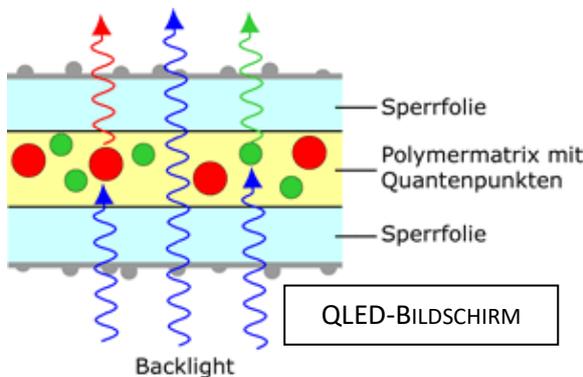
Wir denken uns nur eine solche Struktur mit der Breite $b = 4$ nm, setzen ein Elektron hinein und lassen es nach den Gesetzen der klassischen Physik hin- und herfliegen, obwohl wir wissen, dass es ein Quantenobjekt ist. Wenn es $v = 2 \cdot 10^6$ m/s schnell wäre, also eine Geschwindigkeit von etwa 1% der Lichtgeschwindigkeit hätte, und die Breite $b = 4$ Nanometer wäre, würde es ohne Reibung in der Zeit von $4 \cdot 10^{-9} \text{ m} / 2 \cdot 10^6 \text{ ms}^{-1} = 2 \cdot 10^{-15} \text{ s} = 2$ Femtosekunden zwischen den Enden hin und herfliegen. Das Weg-Zeit-Gesetz sähe aus wie in Figur 2.17, bloss mit anderen Zahlen.



Das Elektron wäre klassisch jederzeit an einem bestimmten Ort.
 Das klassische Energiespektrum wäre kontinuierlich. \Leftrightarrow **Der Quantenpunkt wäre schwarz.**
 Klassisch sorgte Energieverlust durch Strahlung dafür, dass es auf $E = 0$ abstürzte. Ruhe wäre möglich.

2.7.2 Quantenobjekte in einem unendlich tiefen Potentialtopf

Wir betrachten ein Elektron, das in einem sehr engen Raum eingesperrt ist. Solche **Quantenpunkte** bilden die Grundlage für die Technologie der QLED-Bildschirme, wie im Bild vereinfacht dargestellt ist. Dabei sorgen verschiedene Wert von b für verschiedene Farben: b klein \Leftrightarrow grün; b gross \Leftrightarrow rot.



In diesem Abschnitt untersuchen wir das System «Elektron im Quantenpunkt» idealisiert als «Elektron im unendlich hohen Potentialtopf nach den **Gesetzen der Quantenmechanik**. Wir wissen:

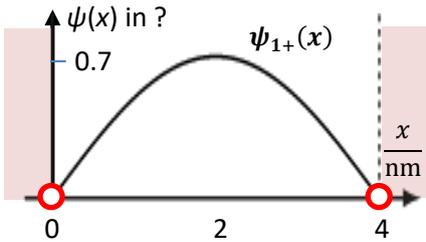
(0) Das Elektron ist nicht auf einer Bahn, sondern in einem Zustand! Wir müssen die korrekte Zustandsfunktion $\psi(x)$ noch finden.

Wir können das Elektron ebensowenig filmen wie die Quanten-Skifahrerin in Figur 2.14.

(1) Nur gewisse Energien werden zu stabilen Zuständen des Systems führen.

(2) Es wird sich zeigen, dass das Elektron im Potentialtopf *nicht* in Ruhe sein kann.

Die gesuchten $\psi(x)$ müssen Sinus-Funktionen sein, denn im Innern des Topfs gilt, was de Broglie über freie Quantenobjekte gefunden hat. Und an der Rändern muss gelten: $\psi(0) = \psi(4) = 0$
 Das ist wie bei den Seilschwingungen von Figur 2.11, denn die unendlich harten Wände entsprechen den Befestigungen der Seilenden. Das Elektron ist nie an den Enden.



FIGUR 2.18a: ZUSTANDSFUNKTION DES GRUNDZUSTANDS

Der Grundzustand lautet: $\psi_{1+}(x) = 0.7 \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)$
 oder so: $\psi_{1-}(x) = -0.7 \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)$.

In Figur 2.18a ist der ψ_{1+} -Zustand (mit dem +Zeichen) ausgewählt und dargestellt.

Die Masseinheit in y-Richtung hat den Wert $(\text{nm})^{-1/2}$, eine total unanschauliche Grösse. Die Bedeutung dieses Bildes ist viel abstrakter als diejenige von Figur 2.17.

Erst mit Borns Regel $\psi^2 = w$ kommen wir der Anschauung näher. In Figur 2.18b ist konkret die Wahrscheinlichkeitsverteilung $w_1(x) = \psi_1^2$ für den Grundzustand dargestellt. Sie gilt für beide Varianten, für $\psi_{1+}(x)$ und $\psi_{1-}(x)$, denn beim Quadrieren fällt das Vorzeichen weg.

$$w_1(x) = +0.5 \cdot \sin^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)$$

Dabei haben wir $0.7^2 = 0.49$ zu 0.5 gerundet Die Masseinheit in y-Richtung hat den Wert $1/\text{nm}$. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung $w_1(x)$ ist eine Wahrscheinlichkeitsdichte.

Von der Wahrscheinlichkeitsdichte $w(x)$ kommt man zur **Wahrscheinlichkeit ΔP** für einen Bereich der Breite Δx , wie von der Massendichte zur Masse: Mit Δx statt V und $w(x)$ anstatt ρ erhalten wir $\Delta P = w(x) \cdot \Delta x$.

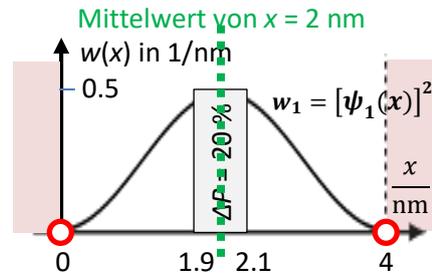
(1) Der wahrscheinlichste Wert das Elektron anzutreffen, liegt in der Mitte zwischen 0 und 4. Der quantenmechanische *Mittelwert oder Erwartungswert für den Ort x* ist 2 nm und stimmt mit demjenigen der klassischen Physik überein.

(2) Doch das Elektron ist überall (mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit)! Beispielsweise findet man die Wahrscheinlichkeit, das Elektron im Intervall $1.9 < x < 2.1$ zu anzutreffen, ohne Integralrechnung als Fläche in der Figur 2.18b:

$$\Delta P(\text{zwischen } 1.9 \text{ und } 2.1) = w(x) \cdot \Delta x \approx 0.5 \text{ nm}^{-1} \cdot 0.2 \text{ nm} = 0.2 = 20\% = \text{getönte Fläche}$$

Alle beliebigen Wahrscheinlichkeiten kann man mit der Integralrechnung bestimmen:

Wahrscheinlichkeit, das Quantenobjekt zwischen a und b zu finden, ist: $\Delta P = \int_a^b 0.5 \cdot \sin^2\left(\frac{\pi x}{4}\right) dx$



FIGUR 2.18b: WAHRSCHEINLICHKEITSDICHTE w UND WAHRSCHEINLICHKEIT (FLÄCHE) IM GRUNDZUSTAND

Auch im Potentialtopf gilt: Das Elektron ist überall und nirgends, je mit einem entsprechenden ΔP .

(3) Wenn wir das Integral über den gesamten Topf ausführen, muss genau $\Delta P = 1$ resultieren, denn es hat genau 1 Elektron drinnen. Mit dem speziellen Zahlwert 0.7 wurde dies angenähert gewährleistet.

(4) Nun kommt de Broglie ins Spiel: Aus Gleichung (2.2) folgt für den Impuls $p = h/\lambda_{dB}$. In unserem Grundzustand hat das Elektron also den Impuls $p_1 = 6.6 \cdot 10^{-34} \text{ Js} / 8 \text{ nm} = 8.1 \cdot 10^{-26} \text{ mkg/s}$. Dabei ist beachtet worden, dass die Wellenlänge doppelt so gross ist wie der Topf breit.

(5) Nun kommt die klassische Mechanik ins Spiel, die für nicht-relativistische Elektronen die Energie angibt: $E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2 = p^2 / 2m \rightarrow E_1 = (8.1 \cdot 10^{-26} \text{ mkg/s})^2 / 2 \cdot 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} = 3.6 \cdot 10^{-21} \text{ J} = 23 \text{ meV}$.

Im Potentialtopf gilt: Das Elektron kann nicht ruhen. Es hat eine Mindestenergie E_1 .

Allgemein beträgt die Energie des Grundzustands: $E_1 = \frac{h^2}{8b^2m}$

(6) Interessant wird es erst, wenn wir die angeregten Zustände studieren. Die Energie des Grundzustands lässt sich nämlich nicht messen. Erst die *Energiedifferenzen* bei Übergängen zwischen verschiedenen Zuständen lassen sich messen.

Die abstrakten $\psi_n(x)$ der angeregten Zustände ergeben sich wie bei den konkreten Seilschwingungen aus der Bedingung, dass das Objekt nie am Rand ist:

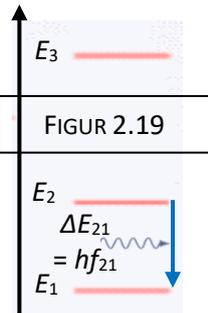
$$\psi_n(0) = \psi_n(4) = 0$$

Es müssen n halbe Wellenlängen in b Platz finden: $n\lambda_n/2 = b \Leftrightarrow \lambda_n = 2b/n$

Das bedeutet für den Impuls im Zustand n : $p_n = h/\lambda_n = nh/2b$

Die Energie im stationären Zustand n beträgt:

$$E_n = \frac{n^2 h^2}{8b^2 m}$$



In Figur 2.19 ist das Energiespektrum aufgetragen. Es erinnert an das Spektrum des H-Atoms. Der wichtige Unterschied ist, dass beim H-Atom die Abstände nach oben kleiner werden und es möglich ist, das Elektron ganz zu entfernen. Das Elektron kann jedoch nie aus dem unendlich tiefen Potentialtopf entweichen.

In Figur 2.19 ist das Lichtquant eingezeichnet, das die beim Übergang von $\psi_2(x)$ nach $\psi_1(x)$ frei wird. Seine Frequenz, Wellenlänge oder Farbe hängt nur von der Breite des Topfs ab:

$$hf_{21} = \Delta E_{21} = \frac{3h^2}{8b^2 m} \quad \text{und ebenso} \quad hf_{32} = \Delta E_{32} = \frac{5h^2}{8b^2 m} \quad \text{usw.}$$

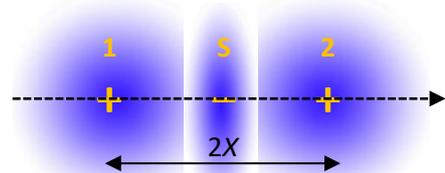
- (0) Das Elektron ist in einem Zustand $\psi_n(x)$. Es ist «immer überall und nirgends».
- (1) Die **Energie E** des Elektrons ist **quantisiert**. Nur bestimmte Energieänderungen sind möglich.
- (2) Die **Farben** des Quantenpunkts zeigen, dass **die Quanten-** und **nicht die klassische Mechanik** gilt.

Extrembeispiel: Wie denken an eines der Neutronen, die in Zeilingers Experiment gemäss Figur 2.5a rund 5 m frei durch die Vakuumröhre fliegen. Der Tank sei ein Potentialtopf der Breite $b = 5$ m. Alle Überlegungen von oben gelten auch in diesem Fall. Wir erhalten für den Übergang vom Grund- in den ersten angeregten Zustand $\Delta E_{21} = \frac{3h^2}{8b^2 m} = 3.9 \cdot 10^{-42}$ J. Das ist unmessbar wenig, *praktisch* = 0.

Daraus ergibt sich die beruhigende Erkenntnis: Ein *freies Quantenobjekt* kann *praktisch* jede beliebige Energie, jeden beliebigen Impuls und jede beliebige Geschwindigkeit ($v < c$) besitzen. Die QM erlaubt auch leichten Objekten das Verhalten, das wir von der klassischen Mechanik kennen.

2.7.3 Die Quantenmechanik erklärt das klassisch unmögliche H_2^+ -Molekül-Ion

Die einfachste Bindung – im H_2^+ -Molekül-Ion mit *einem* Elektron – entsteht durch ein ψ , das um zwei Zentren verteilt ist. In Figur 2.20 ist ein Schnitt durch das rotationssymmetrische Molekül-Ion dargestellt. Die QM sagt, dass ein ψ so möglich ist, dass das Elektron mit je $-(3/7)e$ um eines der beiden Protonen wirkt und deren Rumpfladungen auf $+(4/7)e$ abschirmt. Mit $-(1/7)e$ wirkt es als Rest S in der Symmetrieebene. Nun stellt sich beim Abstand $2X$ ein Kräftegleichgewicht ein, wie die folgende Rechnung (zum Gleichgewicht am Atomrumpf 2) zeigt:



FIGUR 2.20: VEREINFACHTES H_2^+ -ION

$$\text{abstossend} = F_{\text{Rumpfl1-Rumpfl2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{4e/7 \cdot 4e/7}{(2X) \cdot (2X)} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{1e/7 \cdot 4e/7}{(1X) \cdot (1X)} =$$

$$\text{anziehend} = F_{\text{Rest-Rumpfl2}}$$

Weil unsere Annahmen so simpel sind, wäre dieses Molekülion demnach bei jeder Länge $2X$ stabil. Effektiv beträgt der Abstand zwischen den Protonen 106 pm = 2 Bohr-Radien = $2 \cdot a$ und die Bindungsenergie 2.6 eV. Das hat der Däne Burreau schon 1927 ausrechnen können.

AKTIVITÄTEN ZU 2.7

AUFGABEN:

- 2.11) Albert Einstein möchte lieber Schuster sein als Physiker.
 - 2.12) Besser als die Quantenskifahrerin: Super-Curling auf dem Bodensee.
 - 2.13) Könnte die abstrakte ψ -Welle so etwas sein, wie die unsichtbare Grippe-Welle?
- Ergänzung: M2.12) Quantenfussball

RECHERCHE: WIKIPEDIA > Quantum dot

BIOGRAPHIE: Max Born

2.8 Überall ist Quantenland

Bergpreis: Überraschungen im Quantenland.

2.8.1 Generalbeichte mit Katze

1935 nehmen Einstein und Schrödinger das Nachdenken über die Bedeutung von ψ wieder auf:

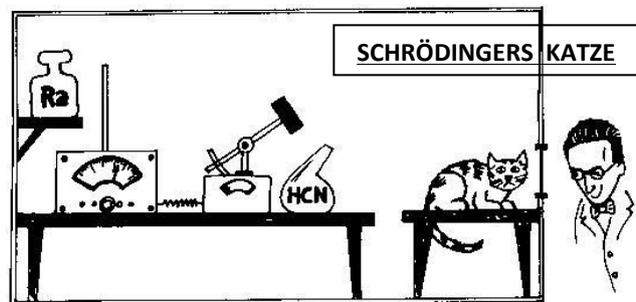
- Die meisten Physiker neigen zur **pragmatisch-operationalistischen Deutung** der Quantenphysik: «Die Messergebnisse stimmen mit den Berechnungen überein. Philosophieren sollen die Philosophen.»

- Bohr und Heisenberg sind die **Epistemiker** im Quantenland: «Die Wellenfunktion sagt nur etwas aus über *unser Wissen* über die Realität.» Diese Haltung heisst auch **Kopenhagener Interpretation**.

- Einstein und Schrödinger neigen zur **ontologischen Interpretation**: «Die Wellenfunktion informiert über *das wirkliche Sein*.» Dabei zeigt sich Schrödinger als Individualist: «Die Wellenfunktion gilt für ein einzelnes Quantenobjekt und nicht nur für ein Ensemble (= grosse Anzahl gleichartiger Objekte).»

In einem langen Artikel unter dem Titel «Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik» betont Schrödinger, dass das **zufällige Verhalten** nicht nur beim Ensemble, sondern auch **im Einzelfall** sollte beobachtet werden können. Weil sich der mikroskopische Einzelfall aber dem Realexperiment entzieht, heckt er ein Gedankenexperiment aus, das die schockierenden Konsequenzen des quantenphysikalischen Zufalls bei der Radioaktivität in die Alltagswelt übersetzt.

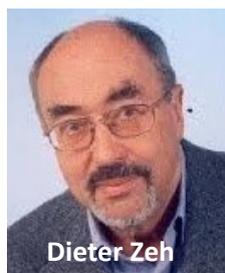
Schrödinger konstruiert den *burlesken Fall* mit einer Katze. Sie ist zusammen mit einem radioaktiven Präparat und einem Mechanismus in einem Kasten eingeschlossen und zeigt den Zustand des Systems an. Das Präparat ist so, dass die Katze nach einer Stunde noch mit einer Wahrscheinlichkeit von $P = 50\%$ lebt. Dieses P ergibt sich aus der Quantenphysik des radioaktiven Atoms. Bevor man den Kasten öffnet, weiss man nichts Bestimmtes. Das ψ des Systems «Katze plus Höllenmaschine» ist derart, dass in ihr die lebende und die tote Katze zu gleichen Teilen gemischt oder verschmiert sind (Schrödinger).



Wir schreiben den **Mischzustand** als $\psi_{\text{Katze}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \psi_{\text{lebend}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \psi_{\text{tot}}$, ähnlich dem Klang einer Saite, die mit Grund- plus Oktav-Ton schwingt. Eine Katze in einem Mischzustand? Das widerspricht dem «gesunden» Menschenverstand! Wenn man den Kasten öffnet, rettet oder tötet man die Katze endgültig. Wenn man das Öffnen einem Apparat und das Registrieren einer Kamera überlässt, wird alles noch wilder: Das Bewusstsein des Betrachters entscheidet nachträglich über Leben und Tod! Schrödinger kommentiert diese paradoxe Situation folgendermassen: *Das Typische an diesen Fällen ist, dass eine ursprünglich auf den Atombereich beschränkte Unbestimmtheit sich in grobsinnliche Unbestimmtheit umsetzt, die sich dann durch direkte Beobachtung entscheiden lässt.* – Wie lässt sich der Widerspruch zwischen Schrödingers Gedankengang und unserer Alltagserfahrung auflösen?

2.8.2 Kohärenz und Dekohärenz

Wir könnten «Unbestimmtheit im Atombereich» übersetzen in «Überlagerungszustand des Quantenobjekts», sowie «grobsinnliche Unbestimmtheit» in «Entscheidung zwischen zwei Anzeigewerten eines Messgeräts». Direkte Beobachtung ist heute möglich; allerdings muss «die Katze» sehr klein und



Dieter Zeh

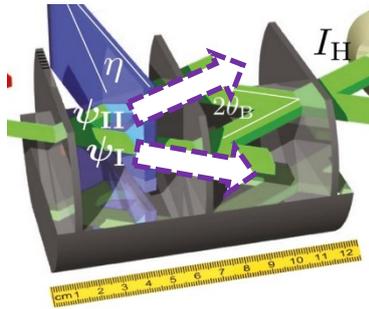
von der Umwelt perfekt isoliert sein, sonst gibt es **Dekohärenz**, wie Dieter H. Zeh einen vorher meist übersehenen, scheinbar einfachen Sachverhalt bezeichnete.

Der Begriff «**Kohärenz**» stammt vom lateinischen *cohaerere* = *zusammenhängen* ab. Wir haben Kohärenz in → 1.6 im Zusammenhang mit den Eigenschaften von Laserlicht angetroffen: «Die wegfliegenden Photonen schwingen im Takt, ihre Wellen sind kohärent.» Wir haben Kohärenz stillschweigend bei allen Doppelspaltversuchen angenommen: Die Wellen, die beim rechten Spalt ankommen, haben genau dann ein Maximum, wenn auch die Wellen beim linken Spalt ein Maximum besitzen.

Wellenoptische Versuche sind mit einem Laser bequem, weil sein Licht kohärent ist. Man kann aber kohärentes Licht aufwendig auch ohne Laser herstellen. Und das Licht des Lasers ist nicht beliebig kohärent, sondern weist nur eine begrenzte Kohärenzlänge auf. Die Terminologie gilt

entsprechend für alle Wellenarten: für elektromagnetische Mikrowellen, Schallwellen und auch für de Broglies Materiewellen, respektive für die ψ -Wellen der Quantenmechanik.

Die Kohärenz von ψ -Wellen ist beispielsweise im abgebildeten Neutroneninterferometer zentral. Es geht auf Helmut Rauch et al. vom österreichischen Atominstytut zurück. Das Kernstück (schwarz) ist



NEUTRONEN-
INTERFEROMETER

aus einem Silizium-Einkristall geschnitten und spaltet die einlaufenden Neutronen durch Braggreflexion wie in → 2.3 in zwei Strahlen auf. Abstrakt: Aufspaltung der ψ -Welle in zwei kohärente Wellen ψ_I und ψ_{II} . Diese werden anschliessend nach dem Mach-Zehnder-Prinzip wie in den Figuren 1.6 und 1.9 überlagert. Die Rolle der Kerze übernimmt hier der blaue Block η .

So aufwändig es ist, kohärentes Licht und kohärente Neutronenstrahlen herzustellen, so leicht gelingt es der Umwelt, die Kohärenz von Quantenzuständen zu zerstören. Auch in einem guten Vakuum hat es Restgas, überall dringt hochenergetische Strahlung aus dem Weltall ein. Und auch in der Nähe des absoluten Nullpunkts strahlen

die Wände noch IR-, Mikrowellen- und Radioquanten ab.

Schrödingers Katze braucht zum Leben Atemluft und eine vernünftige Temperatur. Schon die IR-Strahlung der Wand und nicht irgendein Wahrnehmungsprozess beendet den quantenphysikalischen Mischzustand ψ_{Katze} sofort und führt zum klassischen Messwert «lebendig» respektive «tot».

Die Dekohärenz setzt den Schlusspunkt hinter die Spekulationen um Schrödingers Katze:

- Für das Radium gilt zwar

$$\psi_{\text{Ra}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \psi_{\text{intakt}} + \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \psi_{\text{zerfallen}}$$

- Doch die Kohärenz zwischen ψ_{Ra} (Mikrowelt) und ψ_{Katze} (Makrowelt) verschwindet in kürzester Zeit.

D. Zeh (1970): **Dekohärenz = Zerstörung des quantenphysikalischen Zusammenhangs**
zwischen den Teilen eines quantenphysikalischen Systems durch Umgebungseinflüsse.

In Experimenten, die später erläutert werden, kann man das Verschwinden der Kohärenz zeitlich verfolgen. Je nach Umgebung und Masse des Quantenobjekts beträgt sie Milli- bis Femtosekunden.

2.8.3 Hängt im Universum alles zusammen?

Niels Bohr vertrat die Ansicht, das Messgerät gehorche nicht mehr der Quantenphysik. 1950 sagte Max Born zu dieser heute nicht mehr vertretenen Position:

Man lehrte die Generation, zu der Einstein, Bohr und ich gehören, dass eine objektive physikalische Welt existiert, die sich nach unveränderlichen Gesetzen entfaltet, die von uns unabhängig sind. Wir betrachten diesen Vorgang, wie das Publikum im Theater ein Stück verfolgt. [Dieser Standpunkt wird als «naiver Realismus» bezeichnet. HPD] (...) Die Quantenmechanik deutet indessen die in der Atomphysik gewonnene Erfahrung auf andere Weise. Wir können den Beobachter einer physikalischen Erscheinung nicht mit dem Publikum bei einer Theateraufführung vergleichen, sondern eher mit dem bei einem Fußballspiel, wo (...) Applaus oder Pfeifen (...) einen ausgeprägten Einfluss auf die Schnelligkeit und Konzentration der Spieler und damit auf den beobachtbaren Vorgang haben. Ein noch besseres Gleichnis ist das Leben selbst, wo Publikum und Akteure die gleichen Personen sind.

Hängt das ganze Universum zusammen? Aus der Katzendiskussion ergibt sich, dass die folgende Aufteilung des Universums in drei Bereiche **willkürlich** ist:

$$\text{Universum} = \text{Messobjekt} + \text{Messgerät} + \text{Rest (des Universums)}$$

Es gibt keinen Grund für die Annahme, Messgerät und Universum würden nicht den Gesetzen der Quantenphysik gehorchen. Grundsätzlich sollte man daher ψ_{Ra} , $\psi_{\text{Messgerät}}$ und $\psi_{\text{Restuniversum}}$ einzeln kennen. Damit wird die unsichere Grenzziehung zwischen Quantenobjekt und Messgerät angesprochen und ein zu Bohr entgegengesetzter Standpunkt klar: **Auch das Messgerät gehorcht der Quantenphysik.** Daraus ergibt sich sofort die Erkenntnis:

Ein Problem für die Wissenschaft:
DIE NATUR ERLAUBT IM EXPERIMENT KEINE TRENNUNG ZWISCHEN SUBJEKT UND OBJEKT.

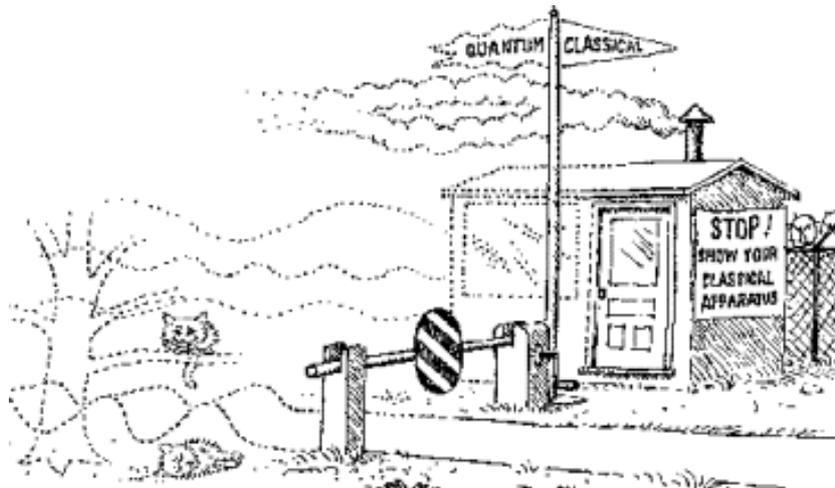
2.8.4 Gilt die Quantenphysik überall? Gibt es eine Grenze zwischen Mikro- und Makrokosmos?

Die Quantenphysik ist die Physik, in der h eine Rolle spielt. Sie wurde beim Licht entdeckt und auf die Materie ausgedehnt. Anfänglich sprach man von «Atomphysik», weil es schien, dass die Quantenphysik nur in atomaren Grössenordnungen eine Rolle spiele. Doch die vorangegangenen Überlegungen zeigen, dass die Quantenphysik überall und in allen Grössenordnungen gilt.

Die Experimente bestätigen diese Behauptung beispielsweise in Doppelspaltversuchen mit immer grösseren Objekten. Im Modul 3 wird unter anderem die experimentelle Grenze zwischen Mikro- und Makrowelt weiter untersucht.

**DIE QUANTENPHYSIK GILT ÜBERALL.
ES GIBT NUR EINE EXPERIMENTELLE, KEINE GRUNDSÄTZLICHE GRENZE 'MIKRO' – 'MAKRO'.**

1925 schreibt Wolfgang Pauli in einem der vielen Briefe, die er mit seinem Freund Werner Heisenberg austauscht: «Man kann die Welt mit dem p -Auge und man kann sie mit dem q -Auge ansehen, aber wenn man beide Augen *zugleich* aufmachen will, wird man irre». Mit dem « p -Auge» meint er «den Fokus auf den Impuls, also den Wellenaspekt legen». Mit dem « q -Auge» meint er «den Fokus auf den Ort x , also den Teilchenaspekt legen». (Die theoretischen Physiker:innen schreiben bei ihren viel-dimensionalen Rechnungen q anstatt x .) 1927 findet Heisenberg die Unbestimmtheitsrelationen, in denen er mathematisch klären kann, in welchem Rahmen sich dieses «Irre-werden» nach dem Übergang über die nicht scharf definierte Grenze von der klassischen Welt in die Quantenwelt äussert. Dazu und zu weiteren Eigenheiten der Quantenphysik lernen Sie mehr in Modul 3.



AKTIVITÄTEN ZU 2.8

AUFGABEN:

2.1) Kontrollfragen zum Modul 2

PANORAMA 1925: Neubeginn nach dem Zusammenbruch

WO IST DAS ELEKTRON? – BILANZ DES MODULS 2

Roadmap ① Teilchenaspekt der Materie = korrekter, aber unvollständiger Kenntnisstand von 1920: «Körnig» sind Masse m , Ladung q , Energie E , Impuls p und die 10^{-10} m kleinen Atome. Das Planetenmodell des Atoms ist anschaulich und einleuchtend, aber falsch; Bohrs Modell hat viele Mängel.

LEITIDEE 2.0: Das Planetenmodell des Atoms ist anschaulich, aber falsch; Bohrs Modell ist veraltet.

Roadmap ① Dualität auch der Materie => Wellenaspekt der Materie = Idee von Louis de Broglie: Jedem Objekt mit einer Masse m wird eine Welle mit der **de Broglie-Wellenlänge** zugeordnet.

LEITIDEE 2.1a: Elektronen, Neutronen usw. zeigen sich körnig und wellig, sind also Quantenobjekte.

De Broglies Gleichung verbindet bei Materie **Wellen-** und **Teilchenaspekt** durch h :

$$\lambda_{dB} = h/mv \quad \lambda_{dB} \text{ ist nur in der Mikrowelt bedeutsam.}$$

Laufende Wellen erklären Interferenzerscheinungen; **tunnelnde** Wellen erklären das RTM. Die Dualität des Elektrons erklärt die **Stabilität des Atoms auch ohne Rotation** qualitativ.

LEITIDEE 2.1b Die Dualität des Elektrons erklärt die Stabilität der Atome ohne Umlauf.

LEITIDEE 2.1c «Das Elektron ist überall und nirgends.» – Atome sind flauschig.

Roadmap ② Abstrakte ψ -Wellen, beim Atom ψ -Zustände = Präzisierung durch Erwin Schrödinger: Jedem «Teilchen» mit Masse m muss eine **abstrakte Welle ψ** zugeordnet werden. Dem Elektron im Atom wird eine **stehende Welle = Zustand ψ** zugeordnet. Es gibt Grund- und angeregte Zustände. In Schrödingers Gleichung für ψ treten **Wellen-** und **Teilchenaspekt** der Materie zusammen mit h auf.

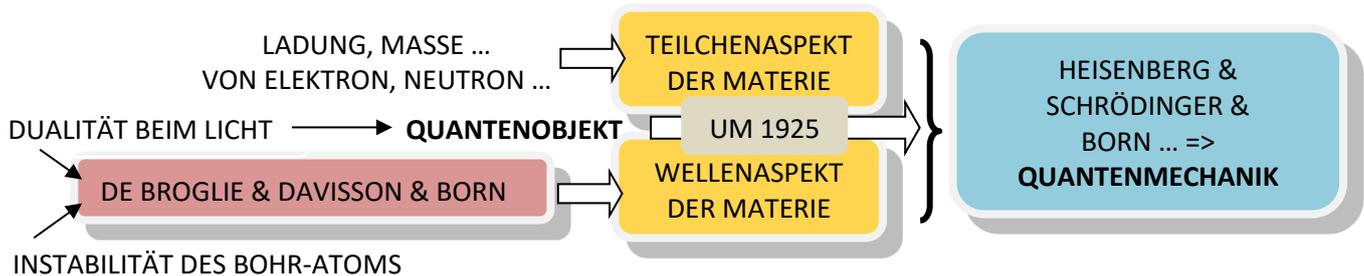
LEITIDEE 2.2: Elektronen sind nicht auf einer Bahn $x(t)$, sondern in einem Zustand ψ .

Roadmap ③ Borns Wahrscheinlichkeitsdeutung der ψ -Wellen verbindet Welliges mit Körnigem. Mit Borns Regel liefert die ψ -Welle die Wahrscheinlichkeitsdichte für das Wirken des **Teilchens**. Im Grundzustand $\psi_1(r)$ resultiert die «Flauschigkeit» des H-Atoms gemäss $w_1(r) = [\psi_1(r)]^2 = C_1^2 \cdot e^{-2r/a}$. Die physikalischen Zustände ψ_1 usw. entsprechen den 1s-Orbitalen usw. der Chemie.

LEITIDEE 2.3: Borns Regel verbindet das Wellige und das Körnige: $w = \psi^2$.

Überraschungen im Quantenland: Schrödingers Katze und die fehlende Grenze Subjekt-Objekt.

MEHR AUS DER PHYSIKGESCHICHTE



WEITERE ERKENNTNISSE ZUM WESEN DER PHYSIK

- ④ Physik ist – wie jede echte Wissenschaft – **offen für neue Erkenntnisse**: Oft wird das Alte transformiert und ins Neue integriert. Wenn Neues hinzukommt, muss oft Altes über Bord, z. B. «Bohr»!
- ⑤ **Theorie und Experiment** stehen in einer wechselseitigen Abhängigkeit. Physikalischer Fortschritt geht manchmal von neuen Daten aus, oft aber auch von neuen Ideen, z. B. bei Louis de Broglie!