11 Elektromagnetische Wellen

11.1 Die Maxwell Gleichungen

Die Eigenschaften von elektrischen und magnetischen Feldern, die wir bisher betrachtet haben geben eine vollständige Beschreibung der zugehörigen Phänomene. Diese Beschreibung lässt sich aber noch weiterführen und ergibt eine Interpretation der optischen Phänomene als elektromagnetische Wellen. Wir wollen diese Beziehungen, die Maxwell-Gleichungen hier nocheinmal zusammenfassen:

Die Maxwell-Gleichungen besagen, erstens, dass elektrische Ladungen die Quellen des elektrischen Feldes sind. Zweitens, dass es keine Ladungen gibt die ein Magnetfeld machen. Drittens können wir sagen, dass elektrische Ströme oder zeitlich veränderliche elektrische Felder ein Magnetfeld machen. Schliesslich haben wir viertens gesehen, dass zeitlich veränderliche Magnetfelder ein elektrisches Feld machen.

Was wir eben in Worten beschrieben haben lässt sich auch konkret in vier Gleichungen festhalten, welche genau definierte Grössen beschreiben die mit den obigen Aussagen zusammenhängen:

$$\int \vec{E} d\vec{A} = Q/\epsilon_0$$
$$\int \vec{B} d\vec{A} = 0$$
$$\int \vec{B} d\vec{r} = \mu_0 I + \epsilon_0 \mu_0 \int \frac{d\vec{E}}{dt} d\vec{A}$$
$$\int \vec{E} d\vec{r} = -\int \frac{d\vec{B}}{dt} d\vec{A}$$

Diese Beziehungen zwischen den elektrischen und magnetischen Flüssen, bzw. der Verwirbelung der elektrischen und magnetischen Felder lassen sich auch direkt als Differentialgleichungen zwischen den Feldern schreiben:

$$div \vec{E} = \rho/\epsilon_0$$
$$div \vec{B} = 0$$
$$rot \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt}$$
$$rot \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$$

Diese in sich symmetrischen Gleichungen, die Maxwell-Gleichungen, werden wir uns nun noch etwas genauer anschauen mit besonderem Merkmal darauf, wie wir aus diesen Beziehungen eine Wellengleichung erhalten für elektrische und magnetische Felder und welche Eigenschaften diese haben. Wir werden sehen, dass diese Wellen sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten und dass Licht, also das Gebiet der Optik, einen Spezialfall dieser elektromagnetischen Wellen darstellt.

11.2 Der Thomson'sche Schwingkreis

Als erstes Beispiel, wie die Kombination der Maxwell-Gleichungen zu einer Wellengleichung führen kann, wollen wir uns ansehen, wie ein Stromkreis ein schwingungsfähiges System darstellen kann. Diese Schwingungsfähigen Systeme werden dann die Grundlage der elektromagnetischen Wellen bilden.

Wir betrachten also einen Stromkreis, der eine Spule (Selbstinduktion L) und einen Kondensator (Kapazität C) in Serie enthält und für den wir daher aus der Maschengleichung die Differentialgleichung erhalten:

$$U_0 \sin \omega t - L\frac{dI}{dt} = \frac{Q}{C} \; .$$

Differenziert man diese Gleichung nach der Zeit erhält man eine Differentialgleichung die nur den Strom beschreibt:

$$\omega E_0 \cos \omega t = L\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{1}{C} I$$

Diese Gleichung lässt sich durch den Ansatz

$$I = I_0 \sin(\omega t + \phi) \; , \; \frac{dI}{dt} = -\omega I_0 \cos(\omega t + \phi) \; , \; \frac{d^2 I}{dt^2} = -\omega^2 I_0 \sin(\omega t + \phi) \; ,$$

lösen, wobei der effektive Widerstand des Schwingkreises von der Frequenz der äusseren elektromotorischen Kraft abhängt. Er wird minimal für den *Resonanzwert*

$$\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \; , \; \Rightarrow \; R_{\text{eff}} = R \; , \; \tan \phi = 0 \; .$$

Bei der *Resonanz-* oder *Eigenfrequenz* des Schwingkreises wird die Amplitude des Stroms I_0 maximal.

Einen speziellen Fall erhält man, wenn die anregende Spannung E_0 zu null wird. Dann erhält man

$$0 = L\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{1}{C} I$$

Die Lösung ist dann eine selbständige Schwingung mit der Eigenfrequenz gleich der Resonanzfrequenz.

$$I = I_0 \cos \omega_0 t \qquad V_L = -L\omega I_0 \sin \omega_0 t \qquad \text{mit } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Dies nennt man den Thomson'schen Schwingkreis.

11.3 Energiedichte von elektrischen und magnetischen Feldern

Die Schwingkreise zeigen uns, dass wir also elektromagnetische Schwingungen haben können. Wellen hatten wir ja als bewegte Störungen schwingender Systeme kennengelernt, die die Energie dieser Schwingungen im Raum transportieren. wir wollen uns jetzt kurz damit befassen welche Energie die elektromagnetischen Wellen transportieren werden. Dazu betrachten wir einen Kondensator um ein konstantes Feld zu haben. Um Ladungen zu trennen, z. B. beim Aufladen eines Kondensators, und um Ströme fliessen zu lassen, muss die Spannungsquelle Arbeit leisten. Dies bedeutet, dass in einem aufgeladenen Kondensator oder in einer stromführenden Spule Energie gespeichert ist. Bei stromführenden Widerständen ist dies nicht der Fall; die von der Spannungsquelle gelieferte Energie, wird da laufend in Wärme umgesetzt.

Wir berechnen die gespeicherte Energie aus dem über die Zeit integrierten Leistungsverbrauch beim Entladen. Es gilt

$$W = \int_0^\infty P dt = \int_0^\infty I\, V dt = \int_0^\infty \frac{U_m}{R} \exp(-\frac{t}{RC})\; U_m \left(\exp(-\frac{t}{RC})\right) dt == \frac{1}{2} C U_m^2$$

Ein Plattenkondensator der Fäche A mit dem Plattenabstand d hat eine Kapazität $C = \epsilon_0 A/d$. Zwischen den Platten erzeugt eine Spannungsdifferenz $V = U_m$ ein elektrisches Feld $E = |\vec{E}| = V/d$. Setzt man diese Beziehungen in den Ausdruck für die gespeicherte Energie ein, so ergibt sich:

$$W = \frac{1}{2} C U_m^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{A}{d} d^2 E^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \;(Ad)$$

Dividiert man die Energie durch das Volumen des Kondensators, so erhält man die *Energiedichte*:

$$w_{elek} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

Dieser hier für den Spezialfall des elektrischen Feldes zwischen den Platten eines Kondensator hergeleitete Ergebnis gilt allgemein für jedes elektrische Feld.

Ein ähnlichen Ausdruck können wir für die Energiedichte des Magnetfeldes erhalten, wenn wir wieder aus dem integrierten Leistungsverbrauch beim Entladen einer Spule die Energie berechnen, und dann diese Energie mit dem Magnetfeld und dem Volumen der Spule in Verbindung setzen.

$$W = \int_0^\infty P dt = \int_0^\infty I\, V dt = \int_0^\infty \frac{U_m}{R} \exp(-\frac{Rt}{L})\; U_m \exp(-\frac{Rt}{L}) dt = \frac{U_m^2}{R} \frac{1}{2} \frac{L}{R} = \frac{1}{2} L \frac{U_m^2}{R^2} = \frac{1}{2} L I_0^2$$

Das Magnetfeld und die Selbstinduktion einer Spule der Länge ℓ und Querschnittsfläche A mit N Windungen, in der ein Strom $I = U_m/R$ fliesst, sind gegeben durch:

$$B = \frac{\mu_0 N I}{\ell}\ , \quad L = \frac{\mu_0 N^2 A}{\ell}\ , \Rightarrow L I^2 = \frac{\mu_0 N^2 A}{\ell} \frac{B^2 \ell^2}{N^2 \mu_0^2} = \frac{B^2 A \ell}{\mu_0}\ .$$

Man erhält also für die Energiedichte $$w_{magn} = \frac{W}{A\ell} = \frac{1}{2\mu_0} B^2\ .$$

Dieses hier für den Spezialfall des Magnetfeldes einer Spule hergeleitete Ergebnis gilt allgemein für jedes Magnetfeld.

Bei zeitlich veränderlichen Feldern treten immer elektrische und magnetische Felder gleichzeitig auf. Man kombiniert daher die beiden obigen Resultate zu einem Ausdruck für die

Energiedichte des elektromagnetischen Feldes: $$w = w_{elek} + w_{magn} = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2\ .$$

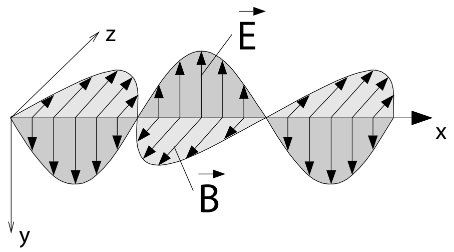
Diese Energie wird von der elektromagnetischen Welle im Raum transportiert. Die zugehörige Wellengleichung wollen wir uns jetzt ansehen. Damit werden wir auch sehen mit welcher Geschwindigkeit die Störung im elektrischen, bzw. magnetischen Feld transportiert wird.

11.4 Wellengleichung

Elektromagnetische Wellen sind *transversale* Wellen. Elektrisches und magnetisches Feld stehen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Welle und senkrecht zueinander. Wegen des Satze von Fourier können auch hier alle Wellen als Summe von harmonischen Wellen betrachtet werden.

Bewegt sich eine harmonische, ebene Welle z. B. in der x-Richtung, so können wir schreiben

$$B_z(x,t) = B_{z_0} \sin(kx - \omega t) \ ,$$
$$E_y(x,t) = E_{y_0} \sin(kx - \omega t) \ .$$



$\vec{E}$ und $\vec{B}$ sind in Phase, wie dies im nebenstehenden Ortsbild einer solchen harmonischen Welle ersichtlich ist.

Die aus den Maxwell'schen Gleichungen folgende Wellengleichung lautet (für diese Wahl des Koordinatensystems). Das jeweils zeitlich änderliche Magnetfeld, bzw. elektrische Feld induziert ein örtlich änderliches elektrisches Feld bzw. Magnetfeld. Betrachten wir ein elektrisches Feld in der y-Richtung, das sich in der x Richtung und in der Zeit ändert, sowie ein Magnetfeld in der z-Richtung, das sich ebenso in der x-Richtung und in der Zeit ändert, Dann erhalten wir aus dem Induktionsgesetz:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{dB_z}{dt}$$

sowie aus dem Ampere'schen Gesetz:

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{dE_y}{dt}$$

Wenn wir von der ersten Gleichung die Ortsableitung und von der zweiten die Zeitableitung nehmen, erhalten wir:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{dB_z}{dt}$$
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial B_z}{\partial x} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{d^2 E_y}{dt^2}$$

Auf der rechten Seite der ersten Gleichung steht dasselbe wie auf der linken Seite der zweiten, das heisst wir erhalten eine Wellengleichung:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}$$

Dabei ist $c^2 = 1/\epsilon_0 \mu_0$ die Ausbreitungsgeschwindigkeit, die sogenannte Lichtgeschwindigkeit. Sie beträgt im Vakuum ca. 3×10^8 m/s und ist völlig unabhängig vom Bewegungszustand der Quelle. Wenn wir nicht im Vakuum sind, dann müssen wir die Dielektrizitätskonstante, bzw. die magnetische Permeabilität des Materials auch noch mitnehmen und erhalten $c = 1/\sqrt{\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0}$. Den Wert $n = \sqrt{\epsilon\mu}$ werden wir in der Optik als Brechungsindex kennenlernen und ausführlich behandlen.

Natürlich gilt auch für die elektromagnetischen Wellen die Beziehungen zwischen Wellenlänge, Frequenz und Ausbreitungsgeschwindigkeit:

$$c = \lambda \cdot \nu$$

11.5 Erzeugung und Spektrum elektromagnetischer Wellen

Grundsätzlich werden elektromagnetische Wellen durch beschleunigte elektrische Ladungen erzeugt. Meistens handelt es sich um oszillierende Ladungen.

Lichtwellen stellen nur jenen kleinen Ausschnitt aus dem Bereich der elektromagnetischen Wellen dar, der unserem Auge sichtbar ist, nämlich den Bereich von ca. $400 - 750$ nm Wellenlänge. In allen Bereichen des Spektrums werden elektromagnetische Wellen durch beschleunigte, meist oszillierende Ladungsverteilungen erzeugt (siehe Tabelle 11.18). Die Frequenz der abgestrahlten Wellen ist dann gleich der Schwingungsfrequenz. So ist die Frequenz von Radiowellen durch die in der Antenne oszillierenden Elektronen, d. h. durch die Frequenz des Senderschwingkreises gegeben. Die Abbildungen 11.139 und 11.140 zeigen die Komponenten eines Radiosenders und die dazugehörigen elektromagnetischen Felder im Nahbereich der Senderantenne. Abbildung 11.141 zeigt die Felder im Fernbereich und zwei Möglichkeiten, eine Empfängerantenne zu konstruieren.

Strahlungstyp Wellentyp	Wellenlängenbereich [m]	Frequenzbereich [s^{-1}]	Erzeugendes System
Gamma-Strahlung	$\lambda < 10^{-11}$	$\nu > 3 \times 10^{19}$	Atomkerne Betatrons
Röntgen-Strahlung	$10^{-11} < \lambda < 10^{-8}$	$3 \times 10^{19} > \nu > 3 \times 10^{16}$	Atomhülle Röntgenröhre
Ultraviolett-Strahlung	$10^{-8} < \lambda < 4 \times 10^{-7}$	$3 \times 10^{16} > \nu > 7.5 \times 10^{14}$	Atomhülle (äussere)
Sichtbares Licht	$4 \times 10^{-7} < \lambda < 7.5 \times 10^{-7}$	$7.5 \times 10^{14} > \nu > 4 \times 10^{14}$	Atomhülle (äussere)
Infrarot-Strahlung	$7.5 \times 10^{-7} < \lambda < 10^{-4}$	$4 \times 10^{14} > \nu > 3 \times 10^{12}$	Atomhülle (Wärme)
Mikrowellen	$10^{-4} < \lambda < 10^{-1}$	$3 \times 10^{12} > \nu > 3 \times 10^{9}$	Hochfrequenz-schwingkreise
Radiowellen (UKW)	$10^{-1} < \lambda < 10$	$3 \times 10^{9} > \nu > 3 \times 10^{7}$	Hochfrequenz-schwingkreise
Radiowellen (KW)	$10 < \lambda < 10^{2}$	$3 \times 10^{7} > \nu > 3 \times 10^{6}$	Hochfrequenz-schwingkreise
Radiowellen (MW)	$10^{2} < \lambda < 10^{3}$	$3 \times 10^{6} > \nu > 3 \times 10^{5}$	Hochfrequenz-schwingkreise
Radiowellen (LW)	$10^{3} < \lambda < 10^{4}$	$3 \times 10^{5} > \nu > 3 \times 10^{4}$	Hochfrequenz-schwingkreise

Tabelle 11.18: Wellenlängen- und Frequenzbereiche für elektromagnetische Wellen mit den dazugehörigen erzeugenden Systemen.

Infrarote, sichtbare und ultraviolette Wellen werden durch die schwingenden und rotierenden Elektronenverteilungen der Atome und Moleküle in Gasen, Flüssigkeiten und festen Körpern erzeugt. Röntgenstrahlung entsteht in hochangeregten Atomen sowie beim Abbremsen schneller Elektronen in Materie. γ-Strahlen werden von angeregten Atomkernen emittiert. Elektromagnetische Wellen aller Frequenzen gelangen auch aus dem Weltraum auf die Erde. Wo und wie sie entstehen, ist noch nicht in allen Fällen geklärt.

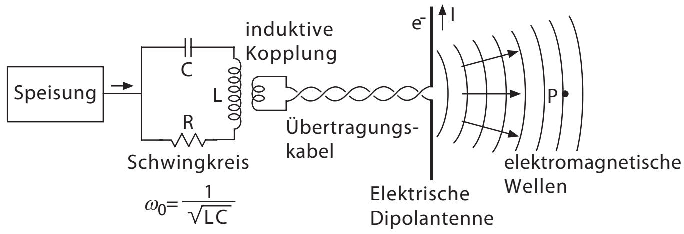


Abbildung 11.139: Prinzipieller Aufbau eines Radiosenders: Eine Energiequelle (Speisung) treibt einen elektrischen Schwingkreis mit der Eigenfrequenz ω_0. Diese ist induktiv an eine Sendeantenne gekoppelt, in der ein oszillierender Strom von Elektronen zur Emission von elektromagnetischen Wellen mit der Kreisfrequenz ω_0 und der Wellenlänge $\lambda = 2\pi c/\omega_0$ führt.

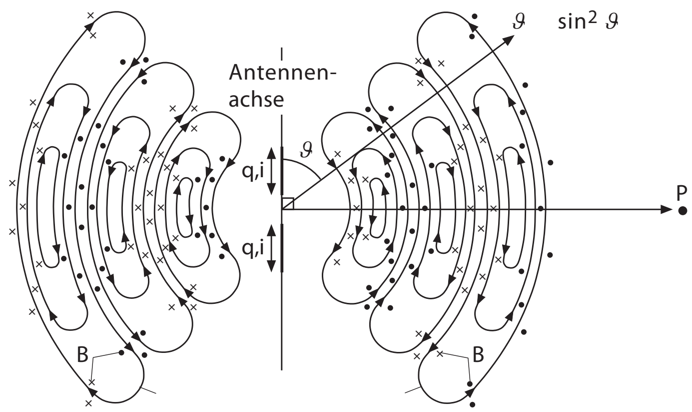


Abbildung 11.140: Elektrisches und magnetisches Feld in der Nähe einer Dipolantenne zu einem bestimmten Zeitpunkt. Die Punkte und Kreuze entsprechen den Magnetfeldrichtungen aus der Bildebene heraus bzw. in die Bildebene hinein. Aus der Richtung elektrischen Feldlinien ist der Vorzeichenwechsel des elektrischen Felds nach einer halben Wellenlänge erkennbar. Die Intensität der emittierten Strahlung variiert mit $\sin^2 \theta$, d. h. ist maximal in einer Richtung senkrecht zur Antennenachse.

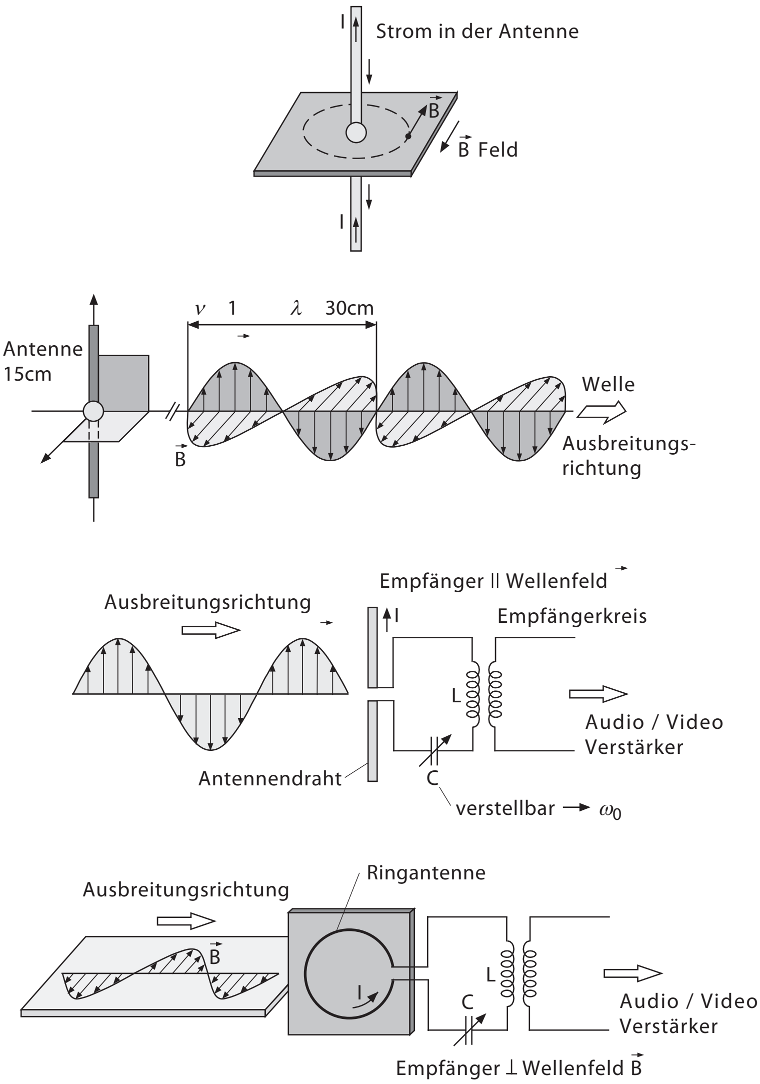


Abbildung 11.141: Oben: Der oszillierende Elektronenstrom in der Antenne erzeugt ein oszillierendes Magnetfeld in der Umgebung der Antenne. Obere Mitte: Das elektrische und das magnetische Feld für eine 15 cm lange Dipolantenne haben eine Wellenlänge von 30 cm entsprechend einer Frequenz von 1 GHz. Untere Mitte: Das elektrische Feld der Welle erzeugt in der Dipolantenne des Empfängerkreises einen oszillierenden Strom. Unten: Das oszillierende Magnetfeld der Welle erzeugt im Antennenring des Empfängers eine Flussänderung und einen induzierten Strom.

11.6 Dopplereffekt

Bei den elektromagnetischen Strahlen gibt es ebenfalls einen Dopplereffekt, ähnlich wie bei Schallwellen. Da es hier aber kein Medium gibt, in dem sich die Strahlung fortpflanzt, unterscheidet sich die Formel für die Dopplerverschiebung leicht. Sei v die relative Geschwindigkeit zwischen Quelle und Beobachter, c die Lichtgeschwindigkeit, ν die abgestrahlte Frequenz und ν' die beobachtete Frequenz. Es gilt

$$\nu' = \nu \cdot \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}$$

Dabei kommt es nur auf die relative Geschwindigkeit zwischen Quelle und Beobachter an, deren absolute Geschwindigkeiten im Raum spielt keine Rolle. v ist positiv zu nehmen, wenn sich Beobachter und Quelle einander nähern.

Der optische Dopplereffekt ist aufgrund der Abhängigkeit von der Lichtgeschwindigkeit nur bei Objekten wichtig die sich sehr schnell bewegen. Bei uns auf der Erde begegnen uns solche Effekte nicht. Allerdings bewegen sich Sterne die sehr weit weg sind (genauer gesagt betrifft dies Galaxien die sehr weit weg sind) sehr schnell von uns weg, so dass man ihr Licht sehr stark rotverschoben sieht. Es hat sich gezeigt, dass je weiter weg eine Galaxis von uns ist, desto schneller bewegt sie sich von uns weg. Das heisst, dass unser Universum sich ständig ausbreitet. Wenn man diese Bewegung zurückrechnet ergibt sich, dass vor etwas mehr als 14 Milliarden Jahren das Universum des klein und dicht gewesen sein muss. Die Expansion seither nennt man auch den Big Bang.