Thermodynamik
Serie 11

HS 2020
Prof. P. Jetzer

M. Haney, S. Tiwari, M. Ebersold
https://www.physik.uzh.ch/de/lehre/PHY341/

Ausgeteilt am: 01.12.20
Abzugeben bis: 08.12.20

---

1. Entropie [4 P]

Wir betrachten als Modell einen quadratischen zweidimensionalen Raum. Dieser solle in $L \times L = K$ Kästchen eingeteilt werden. In jedem dieser Kästchen befinden sich n_i Teilchen, bei einer Gesamtteilchenzahl $N = \sum_{i=1}^{K} n_i$.

a) Welche Verteilung $\{n_i\}$ entspricht einer minimalen, welche einer maximalen "Unordnung", d.h. einem maximalen bzw. minimalen Informationsgehalt im System?

b) Zeige, dass für eine gegebene Verteilung $\{n_i\}$ die Entropie des Systems gegeben ist durch

$$S = -k_B \sum_{i=1}^{K} n_i \log\left(\frac{n_i}{N}\right). \tag{1}$$

Hinweis: Die Entropie ist definiert als $S = k_B \log(\text{Anzahl mögliche Zustände})$. Wieviele Zustände mit fixen $\{n_i\}$ gibt es?

c) Finde die Verteilung $\{n_i\}$ mit der maximalen Entropie aus Gl. (1) bei konstanter Gesamtteilchenzahl N (und die Entropie in diesem Zustand). Was schliesst du daraus?

2. Idealer Paramagnet [5 P]

Wir betrachten $N \gg 1$ unhabhängige magnetische Momente mit totaler Energie E, welche unter Einfluss eines magnetisches Feldes H die Werte $m_i = \pm m$ annehmen können. Das System wird durch die folgende Hamilton Funktion beschrieben

$$\mathcal{H} = -\sum_{i=1}^{N} m_i H = -HM = -Hnm\ , \tag{2}$$

wobei $n \equiv n_+ - n_-$ die Differenz zwischen der Anzahl positiver und negativer Momente ist, und $M \equiv nm$ die totale Magnetisierung ist.

a) Zeige, dass die Anzahl Zustände mit einer gewissen Magnetisierung $M = nm$ (diskrete Phasenraumvolumen) durch

$$\Omega(M) = \frac{N!}{[\frac{1}{2}(N+n)]![\frac{1}{2}(N-n)]!} \tag{3}$$

gegeben ist.

b) Berechne die Entropie $S(E,H) = k_B \log(\Omega(E,H))$.

Hinweis: Benutze die Stirling-Formel $\log(N!) = N \log N - N + \mathcal{O}(\log N)$ für $N \gg 1$, und vernachlässige Terme der Ordnung $\log N$.

c) Berechne die Temperatur $\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_H$ und löse für $E = E(T,H)$.

d) Die Magnetisierung ist gegeben durch $M = T\left(\frac{\partial S}{\partial H}\right)_E$. Zeige, dass im Hochtemperaturlimes ($k_B T \gg Hm$) die Magnetisierung M das Curie-Gesetz $M = N\frac{Hm^2}{k_B T}$ erfüllt.