**Übung 1.** *[Orts- und Impulsdarstellung]*

*Impulserwartungswerte zu Wellenfunktionen $\varphi(\mathbf{p},t)$ im Impulsraum lassen sich wie folgt*

$$\langle \mathbf{p} \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \varphi^*(\mathbf{p},t)\, \mathbf{p}\, \varphi(\mathbf{p},t)$$

*berechnen.*

a) *Wie lassen sich diese im Ortsraum bestimmen? Wie sieht der Impulsoperator im Ortsraum aus?*

*Ähnlich sind die Ortserwartungswerte zu Wellenfunktionen $\psi(\mathbf{x},t)$ im Ortsraum gegeben als*

$$\langle \mathbf{x} \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3 x\, \psi^*(\mathbf{x},t)\, \mathbf{x}\, \psi(\mathbf{x},t)\,.$$

b) *Wie lassen sich diese im Impulsraum bestimmen? Wie sieht der Ortsoperator im Impulsraum aus?*

**Lösung.**

a) Für $\varphi(\mathbf{p},t)$ wird die Fourier-Transformierte

$$\varphi(\mathbf{p},t) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3 x\, \psi(\mathbf{x},t)\, \mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}$$

eingesetzt und wir erhalten

$$\langle \mathbf{p} \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3 x'\, \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}'} \psi^*(\mathbf{x}',t)\, \mathbf{p} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3 x\, \mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \psi(\mathbf{x},t)\,.$$

Das lässt sich auch wie folgt umschreiben:

$$\langle \mathbf{p} \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3 x'\, \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}'} \psi^*(\mathbf{x}',t) \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3 x\, \left( i\hbar\nabla_x \mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \right) \psi(\mathbf{x},t)\,.$$

Die partielle Integration des letzten Integrals (unter der Voraussetzung $\psi(\mathbf{x},t) \in L^2$) liefert

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{p} \rangle &= \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3 x \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3 x'\, \psi^*(\mathbf{x}',t)\, (-i\hbar\nabla_x \psi(\mathbf{x},t))\, \underbrace{\frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3 p\, \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{x}'-\mathbf{x})\cdot\mathbf{p}}}_{\delta^3(\mathbf{x}'-\mathbf{x})} \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3 x\, \psi^*(\mathbf{x},t)\, (-i\hbar\nabla_x)\, \psi(\mathbf{x},t)\,,\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die Definition der Delta-Distribution verwendet wurde. Wegen dieses Zusammenhanges bezeichnet man $-i\hbar\nabla_x$ als den Impulsoperator in Ortsdarstellung.

b) Für $\psi(\mathbf{x},t)$ wird die Fourier-Transformierte

$$\psi(\mathbf{x},t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi\hbar)^3}\, \varphi(\mathbf{p},t)\, \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}$$

eingesetzt. Ähnliche Schritte wie für Teil a) führen hier zu

$$\langle \mathbf{x} \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi\hbar)^3}\, \varphi^*(\mathbf{p},t)\, i\hbar\nabla_p \varphi(\mathbf{p},t)\,.$$

Aus diesem Zusammenhang identifiziert man $i\hbar\nabla_p$ als den Ortsoperator in Impulsdarstellung.

**Übung 2.** *[Gauss'sches Wellenpaket]*

*Eine Wellenfunktion sei gegeben durch*

$$\psi(\mathbf{x},t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi\hbar)^3}\, \phi(\mathbf{p})\, \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}-Et)}\,.$$

*Wir betrachten im folgenden ein Gauss'sches Wellenpaket in einer Dimension, bei dem $\phi(p)$ gegeben ist durch*

$$\phi(p) = A\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{\hbar^2}(p-p_0)^2 d^2}. \tag{1}$$

*Die Wahrscheinlichkeitsdichte im Impulsraum ist definiert durch*

$$w(p,t) = \frac{1}{2\pi\hbar}|\phi(p,t)|^2.$$

a) *Bestimmen Sie die Konstante $A$ aus der Normierungsbedingung $\int \mathrm{d}p\, w(p,t) = 1$.*

*Zeige dann, dass für das obige, eindimensionale, Wellenpaket gilt:*

b) $w(p,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{d}{\hbar}\exp\left(-2(p-p_0)^2\frac{d^2}{\hbar^2}\right)$

c) $\langle p \rangle = p_0$

d) $\Delta p = \frac{\hbar}{2d}$

**Lösung.**

a) Aus der Normierungsbedingung für $w(p,t)$ und Glg.(1) folgt direkt

$$1 = \frac{A^2}{2\pi\hbar}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}p\, \mathrm{e}^{-\frac{2d^2}{\hbar^2}(p-p_0)^2} = \frac{A^2}{2\pi\hbar}\underbrace{\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\tilde{p}\, \mathrm{e}^{-\frac{2d^2}{\hbar^2}\tilde{p}^2}}_{\sqrt{\pi\hbar^2/2d^2}},$$

wobei im letzten Schritt das Resultat für Gauss'sche Integrale verwendet wurde. Auflösen nach $A$ gibt $A = \sqrt[4]{8\pi d^2}$.

b) Einsetzen von $\phi(p)$ in den Ausdruck der Wahrscheinlichkeitsdichte $w(p,t)$ gibt das gewünschte Ergebnis.

c) Aus der Definition des Erwartungswertes erhalten wir

$$\langle p \rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}p}{2\pi\hbar}\, \phi^*(p)\, p\, \phi(p) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{d}{\hbar}\int_{\mathbb{R}} p\, \exp\left(-2(p-p_0)^2\frac{d^2}{\hbar^2}\right)\mathrm{d}p.$$

Die Variablentransformation $p \to p' = p - p_0$ ($\mathrm{d}p' = \mathrm{d}p$) ergibt dann

$$\langle p \rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{d}{\hbar} \left[ \int_{\mathbb{R}} p' \mathrm{e}^{-a^2 p'^2} \, \mathrm{d}p' + p_0 \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-a^2 p'^2} \, \mathrm{d}p' \right] \tag{L.1}$$

mit $a = \sqrt{2} d/\hbar$. Das erste Integral in der Klammer ergibt 0, da die Funktion ungerade ist. Für das zweite (Gauss'sche) Integral erhält man $\sqrt{\pi}/a$. Einsetzen liefert das gewünschte Ergebnis.

d) Definition der Varianz: $(\Delta p)^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2$. Der erste Summand ist gegeben durch

$$\langle p^2 \rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}p}{(2\pi\hbar)^3} \, \phi^*(p) \, p^2 \, \phi(p).$$

Ähnliche Vorgehensweise wie oben (Variablentransformation) führt auf das Integral

$$\langle p^2 \rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{d}{\hbar} \int_{\mathbb{R}} \left( p'^2 + 2p' p_0 + p_0^2 \right) \mathrm{e}^{-a^2 p'^2} \, \mathrm{d}p'.$$

Der erste Term des Integrals hat den Wert $\sqrt{\pi}/2a^3$, der zweite Term gibt wieder 0 (ungerader Integrand), und der dritte Term liefert das gleich Ergebnis wie in der obigen Aufgabe [siehe Glg.(**??**)]. Er hebt sich also mit dem Beitrag, der von $\langle p \rangle^2$ kommt, weg. Übrig bleibt der erste Term. Einsetzen liefert

$$\langle p^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{4d^2} + p_0^2 \qquad \Rightarrow \qquad \Delta p = \frac{\hbar}{2d}.$$

**Übung 3.** *[Rechnen mit Kommutatoren]*

*Seien $A$, $B$ und $C$ lineare Operatoren. Der Kommutator $[A, B] = AB - BA$ ist linear in $A$ und $B$ und antisymmetrisch, d.h. $[B, A] = -[A, B]$.*

*a) Zeige, dass der Kommutator die Produktregeln*

$$[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C,$$

$$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$$

*erfüllt.*

*b) Zeige, dass der Kommutator die Jacobi-Identität*

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$$

*erfüllt.*

**Lösung.**

a) Durch Ausschreiben der Kommutatoren findet man

$$B[A, C] + [A, B]C = BAC - BCA + ABC - BAC = ABC - BCA = [A, BC], \tag{L.2}$$

$$A[B, C] + [A, C]B = ABC - ACB + ACB - CAB = ABC - CAB = [AB, C]. \tag{L.3}$$

b) Infolge der Linearität von Kommutatoren hat mat

- $-[B,A] = -(BA - AB) = AB - BA = [A,B]$ 0.5 pt

- $[[A,B],C] + [[B,C],A] + [[C,A],B] = [AB - BA, C] + [BC - CB, A] + [CA - AC, B]$
  $= (\cancel{AB} - \cancel{BA})C - C(\cancel{AB} - \cancel{BA}) + (\cancel{BC} - \cancel{CB})A$
  $- A(\cancel{BC} - \cancel{CB}) + (\cancel{CA} - \cancel{AC})B - B(\cancel{CA} - \cancel{AC})$