https://www.physik.uzh.ch/de/lehre/PHY331/HS2019.html Ausgabe: 21. November 2019

Übung 1. *[Tensoroperatoren und das Wigner-Eckart Theorem]* ***(1.5 Punkte)***

Ein Vektoroperator $\vec{V}$ wird quantenmechanisch als Größe definiert, die sich unter Drehungen komponentenweise wie

$$V_i \to \sum_j R_{ij} V_j \tag{1}$$

transformiert, wobei hier R_{ij} eine 3×3 Drehmatrix ist.
Man kann nun (1) verallgemeinern und durch die Transformation

$$T_{ijk\ldots} \to \sum_{i'j'k'\ldots} R_{ii'} R_{jj'} R_{kk'} T_{i'j'k'\ldots} \tag{2}$$

einen kartesischen Tensor definieren, wobei die Anzahl der Indizes den Rang des Tensors angibt.

a) Betrachte als Beispiel den Tensor $T_{ij} = V_i U_j$, mit U_i und V_j als Einträge zweier Vektoren $\vec{U}$ und $\vec{V}$. Zerlege T_{ij} in Komponenten, die sich wie ein Skalar, ein antisymmetrischer und ein symmetrischer Tensor unter Rotationen verhalten. Vergewissere dich, dass das so erhaltene Objekt die selbe Anzahl Freiheitsgrade wie T_{ij} hat, und vergleiche mit der Multiplizität die man für Objekte mit Bahndrehimpuls $\ell = 0, 1, 2$ erhält.

Basierend auf der Zerlegung von (2) in Beiträge zu unterschiedlichen Bahndrehimpulsen kann man nun einen sphärischen Tensor $T_q^{(k)}$ vom Rang k, $q = -k, \ldots, k$, durch die Kommutationsrelationen

$$\left[J_z, T_q^{(k)}\right] = \hbar q T_q^{(k)}, \tag{3}$$

$$\left[J_\pm, T_q^{(k)}\right] = \hbar\sqrt{(k \mp q)(k \pm q + 1)}\,T_{q\pm1}^{(k)}, \tag{4}$$

definieren. $\vec{J}$ bezeichnet hier den Gesamtdrehimpuls des betrachteten Systems, J_z seine z-Komponente und $J_\pm$ die üblichen Auf-und Absteigeoperatoren.

b) Sei $|jm\rangle$ ein Eigenvektor zu $\vec{J}^2$ und J_z mit Eigenwerten $\hbar^2 j(j+1)$ und $m\hbar$. Zeige die m-Auswahlregel

$$\langle j'm'|\, T_q^{(k)}\, |jm\rangle = 0, \quad \text{für } m' \neq q + m. \tag{5}$$

c) Leite nun mit Hilfe von (3) und (4) eine Rekursionsbeziehung für die Matrixelemente $\langle j'm'|\, T_q^{(k)}\, |jm\rangle$ her.

d) Vergleiche die in c) gewonnene Rekursionsbeziehung mit der Rekursionsbeziehung für Clebsch-Gordon Koeffizienten

$$\begin{aligned} & \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}\, \langle j_1 j_2; m_1 m_2 | j_1 j_2; j, m \pm 1\rangle \\ = & \sqrt{(j_1 \mp m_1 + 1)(j_1 \pm m_1)}\, \langle j_1 j_2; m_1 \mp 1, m_2 | j_1 j_2; jm\rangle \\ + & \sqrt{(j_2 \mp m_2 + 1)(j_2 \pm m_2)}\, \langle j_1 j_2; m_1, m_2 \mp 1 | j_1 j_2; jm\rangle \end{aligned} \tag{6}$$

und leite daraus das *Wigner-Eckart Theorem*

$$\langle j'm'|\, T_q^{(k)}\, |jm\rangle = \langle jk; mq | jk; j'm'\rangle \frac{\langle j'|\,|T^{(k)}|\,|j\rangle}{\sqrt{2j+1}} \tag{7}$$

her, wobei das *reduzierte Matrixelement* $\langle j'|\,|T^{(k)}|\,|j\rangle$ nicht von m, m', q abhängt.

Übung 2. *[Stark-Effekt]* ***(1.5 Punkte)***

Wenn ein Atom sich in einem homogenen elektrischen Feld $\vec{E}_{ext}$ befindet, werden die Energieniveaus verschoben. Dieses Phänomen ist das elektrische Analogon zum Zeeman-Effekt und wird als Stark-Effekt bezeichnet. In dieser Aufgabe betrachten wir den Stark-Effekt für die Zustände $n = 1$ und $n = 2$ des Wasserstoffatoms. O.B.d.A. zeige das elektrische Feld in die z-Richtung, so dass die potentielle Energie des Elektrons

$$H'_S = eE_{ext}z \tag{8}$$

ist. Behandle diese Kopplung als Störoperator zu dem Bohr'schen Hamiltonoperator des Wasserstoffatoms $H_0\psi_{n\ell n} = E_n^{(0)}\psi_{n\ell m}$. Im Folgenden benutzen wir die Notation $|n, \ell, m\rangle$ für die Zustände, die durch die Wellenfunktion $\psi_{n\ell m}$ beschrieben werden.

a) Leite die Auswahlregeln $m' = m$ und $|\ell' - \ell| = 1$ für das Matrixelement $\langle n', \ell', m'|\, z\, |n, \ell, m\rangle$ her.
Nutze hierfür: $\left[L^2, \left[L^2, \vec{x}\right]\right] = 2\hbar^2 \left(\vec{x}L^2 + L^2\vec{x}\right)$.

b) Zeige, dass somit der Grundzustand in erster Ordnung von der Störung nicht verändert wird.

c) Der erste angeregte Zustand mit Energie $E_2^{(0)}$ ist vierfach entartet unter den $n = 2$ Eigenzuständen mit Wellenfunktionen ψ_{200}, ψ_{21-1}, ψ_{210} und ψ_{211}. Verwende die Störungstheorie für einen entarteten Energieeigenwert und bestimme die Korrekturen in erster Ordnung zur Energie $E_2^{(0)}$. Wieviele nichtentartete Niveaus gibt es nach der Aufspaltung?