Übung 1. *[Eigenschaften des Bahndrehimpulsoperators]*

Gegeben sei der Bahndrehimpulsoperator $\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p}$ mit dem Ortsoperator $\vec{x} = (x, y, z)$.

a) Zeige, dass der Bahndrehimpulsoperator hermitesch ist.

b) Berechne mit Hilfe der fundamentalen Vertauschungsrelationen zwischen Ort und Impuls die folgenden Kommutatoren:

   i) $[L_i, L_j]$,
   ii) $[\vec{L}^2, L_i]$,
   iii) $[L_i, x_j]$,
   iv) $[L_i, \vec{x}^{\,2}]$,
   v) $[L_i, p_j]$,
   vi) $[L_i, \vec{p}^2]$,

c) Zeige, dass die Relation

$$[\vec{L}^2, [\vec{L}^2, x_j]] = 2\hbar^2 \left(\vec{L}^2 x_j + x_j \vec{L}^2 \right) \tag{1}$$

erfüllt ist.

Übung 2. *[Darstellung der $SO(3)$]*

a) Zeige, dass die 3×3 Matrizen M_j $(j = 1, 2, 3)$, die durch

$$(M_j)_{kl} = -\mathrm{i}\, \epsilon_{jkl}\,, \quad (j, k, l = 1, 2, 3)\ , \tag{2}$$

definiert sind, den $SO(3)$-Vertauschungsregeln

$$[M_j, M_k] = \mathrm{i}\, \epsilon_{jkl} M_l \tag{3}$$

genügen.

b) Berechne den *Casimir-Operator* $M^2 = \sum_j M_j^2$. Welche Drehimpulsquantenzahl l haben die M_j demzufolge?

c) Welche Eigenwerte m sollte M_3 nach b) besitzen? Diagonalisiere M_3 und bestimme die Eigenwerte und die dazugehörigen Eigenvektoren.

Die Eigenvektoren von M_3 sind jeweils nur bis auf einen Phasenfaktor bestimmt. Ihre relativen Phasen lassen sich wie folgt festlegen:

d) Bestimme die Matrizen $M_\pm = M_1 \pm \mathrm{i}\, M_2$ und damit den Vektor $\vec{a}_1$, für den gilt:

$$M_+ \vec{a}_1 = 0\,. \tag{4}$$

Zeige, dass $\vec{a}_1$ Eigenvektor zu M_3 mit Eigenwert $m = 1$ ist.

e) Bestimme nun die beiden anderen Eigenvektoren $\vec{a}_0$ und $\vec{a}_{-1}$ von M_3 (zu den Eigenwerten $m = 0$ und $m = -1$) durch Anwendung von M_-. Damit sind die relativen Phasen der $\vec{a}_m$ festgelegt. Die verbleibende unbestimmte Phase kann man so festlegen, dass $\vec{a}_0$ nur positive, reelle Komponenten besitzt. Gib mit dieser Konvention die $\vec{a}_m$ an.

Übung 3. *[Erwartungswerte der Drehimpulsoperatoren]*

Ein System befinde sich im Zustand $\psi = \Phi_{lm}$, ein Eigenzustand der Drehimpulsoperatoren M^2 und M_z. Berechne $\langle M_x \rangle$, $\langle M_x^2 \rangle$, $\langle M_y \rangle$ und $\langle M_y^2 \rangle$.

Übung 4. *[Drehimpuls eines Teilchens]*

Betrachte ein spinloses Teilchen, das durch die Wellenfunktion

$$\Psi = K\,(x + y + 2z)e^{-\alpha r}, \quad \text{mit } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad K, \alpha \in \mathbb{R} \tag{5}$$

gegeben ist.

a) Berechne den Gesamtdrehimpuls des Teilchens.

b) Berechne den Erwartungswert des Drehimpulses in z-Richtung.

c) Was ist die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung des Drehimpulses in z-Richtung $L_z = +\hbar$ zu erhalten?

d) Was ist die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen im Raumwinkel $d\Omega$ mit den Koordinaten θ, ϕ zu finden?

Hinweis: Drücke Ψ durch Kugelflächenfunktionen aus.