Übung 1. *[Erwartungswerte der Operatoren des harmonischen Oszillators]*

Gegeben sei der Hamilton-Operator

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{x}^2 \tag{1}$$

eines eindimensionalen harmonischen Oszillators. Gib die Erwartungswerte der kinetischen und potentiellen Energie von H bezüglich beliebiger Energieeigenfunktionen an.

Lösung. In Besetzungszahldarstellung gilt

$$\langle \hat{x} \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega m}} \left(\langle a \rangle + \langle a^\dagger \rangle \right) = 0\,, \quad \langle \hat{p} \rangle = -\mathrm{i}\sqrt{\frac{\hbar\omega m}{2}} \left(\langle a \rangle - \langle a^\dagger \rangle \right) = 0 \tag{L.1}$$

wegen

$$\langle a \rangle = \langle n | \, a \, | n \rangle = \sqrt{n} \, \langle n | n-1 \rangle = 0\,, \quad \langle a^\dagger \rangle = \langle n | \, a^\dagger \, | n \rangle = \sqrt{n+1} \, \langle n | n+1 \rangle = 0\,. \tag{L.2}$$

Ausserdem gilt

$$\langle a^\dagger a \rangle = n\,, \quad \langle a a^\dagger \rangle = \langle a^\dagger a + [a, a^\dagger] \rangle = \langle a^\dagger a \rangle + 1 = n + 1\,, \tag{L.3}$$

und somit

$$\begin{aligned} \langle \hat{x}^2 \rangle &= \frac{\hbar}{2m\omega} \langle (a + a^\dagger)(a + a^\dagger) \rangle \\ &= \frac{\hbar}{2m\omega} \langle a a^\dagger + a^\dagger a \rangle \\ &= \frac{\hbar}{m\omega} (n + \frac{1}{2})\,. \end{aligned} \tag{L.4}$$

Daraus folgt

$$\langle V \rangle = \frac{m\omega^2}{2} \langle \hat{x}^2 \rangle = \frac{\hbar\omega}{2} (n + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} E_n\,, \tag{L.5}$$

$$\langle T \rangle = E_n - \langle V \rangle = \frac{1}{2} E_n\,. \tag{L.6}$$

Übung 2. ***[Matrixdarstellung des harmonischen Oszillators]***

Gebe die Matrixdarstellung der Operatoren a,$a^\dagger$,p,x bezüglich des Orthonormalsystems der Energieeigenzustände $|n\rangle$ des harmonischen Oszillators an, d.h. berechne das Skalarprodukt zwischen $|m\rangle$ und $a\,|n\rangle$ usw. für beliebige m und n. Berechne durch Matrixmultiplikation den Kommutator $[x, p]$, sowie den Hamiltonoperator $H = \frac{1}{2}\left(m\omega^2 x^2 + \frac{p^2}{m}\right)$.

Lösung.

$$\langle m| a |n\rangle = \langle m| \sqrt{n} |n-1\rangle = \sqrt{n}\delta_{m,n-1} \Rightarrow a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{4} & \\ \vdots & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$\langle m| a^\dagger |n\rangle = \langle m| \sqrt{n+1} |n+1\rangle = \sqrt{n+1}\delta_{m,n+1} \Rightarrow a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 & \\ \vdots & & & \ddots & & \end{pmatrix}$$

$$\hat{p} = -\mathrm{i}\sqrt{\frac{\hbar\omega m}{2}}\left(a - a^\dagger\right) = -\mathrm{i}\sqrt{\frac{\hbar\omega m}{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & 0 & \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} & 0 & \sqrt{4} & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega m}}\left(a + a^\dagger\right) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega m}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & 0 & \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \sqrt{4} & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$\hat{x}\hat{p} = -\frac{\mathrm{i}\hbar}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 0 & \sqrt{6} & 0 & \\ -\sqrt{2} & 0 & -1 & 0 & \sqrt{12} & \\ 0 & -\sqrt{6} & 0 & -1 & 0 & \ddots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$\hat{p}\hat{x} = -\frac{\mathrm{i}\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \sqrt{6} & 0 & \\ -\sqrt{2} & 0 & 1 & 0 & \sqrt{12} & \\ 0 & -\sqrt{6} & 0 & 1 & 0 & \ddots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [\hat{x}, \hat{p}] = \mathrm{i}\hbar\,\mathbb{1}$$

$$\hat{x}^2 = \frac{\hbar}{2\omega m} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 3 & 0 & \sqrt{6} & 0 & \\ \sqrt{2} & 0 & 5 & 0 & \sqrt{12} & \\ 0 & \sqrt{6} & 0 & 7 & 0 & \ddots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$\hat{p}^2 = -\frac{\hbar\omega m}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -3 & 0 & \sqrt{6} & 0 & \\ \sqrt{2} & 0 & -5 & 0 & \sqrt{12} & \\ 0 & \sqrt{6} & 0 & -7 & 0 & \ddots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow H = \frac{1}{2}\left(m\omega^2\hat{x}^2 + \frac{\hat{p}^2}{m}\right) = \frac{\hbar\omega}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 3 & 0 & \\ 0 & 0 & 5 & \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Übung 3. ***[Phasenraum des harmonischen Oszillators]***

Betrachte die Hamiltonfunktion $H(p,x)$ des (klassischen) eindimensionalen harmonischen Oszillators. Welche Form hat die Kurve $H(p,x) = E$ im Phasenraum? Berechne das Phasenraumvolumen $V_{PR}(E) = \int dx \int dp$, das von dieser Kurve eingeschlossen wird. Aus den bekannten Energieeigenwerten des quantenmechanischen harmonischen Oszillator $E_n = \hbar\omega(n+1/2)$ folgt die Anzahl N_E der Zustände mit $E_n \leq E$. Stelle den Zusammenhang zwischen dieser Anzahl N_E und dem Phasenraumvolumen $V_{PR}(E)$ her.

Lösung. Die Bedingung $H(p,x) = E$ kann in der Form

$$\frac{p^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1\,, \quad \text{mit} \quad a = \sqrt{2mE}\,, \quad b = \sqrt{2E/(m\omega^2)} \tag{L.7}$$

geschrieben werden. Es handelt sich also um eine Ellipse mit den Halbachsen a und b. Das Phasenraumvolumen ist gleich der Ellipsenfläche:

$$V_{PR}(E) = \int\int_{H<E} dp\, dq = \pi ab = \frac{2\pi E}{\omega}\,. \tag{L.8}$$

Die Anzahl N_E der Zustände mit einer Energie kleiner als E ist

$$N_E = \sum_{E_n<E} 1 \approx \frac{E}{\hbar\omega} = \frac{V_{PR}(E)}{2\pi\hbar}\,, \quad (N_E \gg 1)\,. \tag{L.9}$$

Dieses Ergebnis kann im Rahmen der Unschärferelation erklärt werden. Da die Relation $\Delta x\Delta p \geq \hbar/2$ die Koordinate x_n und den Impuls p_n des Zustands mit Energie E_n festlegt, nimmt jeder Zustand ein Volumen der Grösse $2\pi\hbar$ im Phasenvolumen ein. Unter der Voraussetzung $N_E \gg 1$ gilt das Ergebnis für beliebige eindimensionale Systeme.

Übung 4. ***[Oszillator mit Wand]***

Bestimme ohne explizite Berechnung, allein aus Kenntnis des Spektrums und der Eigenschaften der Eigenfunktionen des quantenmechanischen harmonischen Oszillators, die Energieeigenwerte und Eigenfunktionen für ein Teilchen im Potential

$$V(x) = \begin{cases} \infty & (x < 0) \\ m\omega^2 x^2/2 & (x \geq 0)\,. \end{cases} \tag{2}$$

Lösung. Für $x < 0$ ist das Potenzial unendlich, und die Wellenfunktion ist null $\psi(x) = 0$. Für $x \geq 0$ kommen die bekannten Oszillatorvellenfunktionen $\psi_n(x)$ als Lösung in Frage. Die Anschlussbedingung $\psi(0) = 0$ schliesst die Oszillatorfunktionen mit gerader Parität (n gerade) aus. Für die Oszillatorfunktionen mit ungerader Parität (n ungerade) ist die Anschlussbedingung erfüllt. Die gesuchten Eigenfunktionen sind demnach

$$\psi_n(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ \\ c_n H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\right) e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} & (x \geq 0)\,. \end{cases} \qquad \text{mit} \qquad n = 1, 3, 5, \ldots \tag{L.10}$$

Die zugehörigen Eigenwerte sind die Oszillatorenergien $E_n = \hbar(n + 1/2)$ mit $n = 1, 3, 5, \ldots$.

Übung 5. ***[optional: Supersymmetrie]***

Der Hamiltonoperator des eindimensionalen harmonischen Oszillators lautet
$H_B = \frac{1}{2}\hbar\omega(a^\dagger a + aa^\dagger)$, *wobei die Erzeuger und Vernichter* $a^\dagger$,a *die Vertauschungsrelationen*

$$[a, a^\dagger] = 1, \qquad [a, a] = [a^\dagger, a^\dagger] = 0$$

erfüllen. Wir definieren nun ein ähnliches System mit dem Hamiltonoperator

$$H_F = \frac{1}{2}\hbar\omega\left(b^\dagger b - bb^\dagger\right),$$

wobei

$$\{b, b^\dagger\} = 1, \qquad \{b, b\} = \{b^\dagger, b^\dagger\} = 0.$$

Hierbei bezeichnet $\{\cdot, \cdot\}$ *den Antikommutator, allgemein* $\{A, B\} \equiv AB + BA$.
Bestimme zunächst die Eigenwerte von H_F. *Gibt es eine Besetzungszahldarstellung und Auf- und Absteigeoperatoren analog zum gewöhnlichen harmonischen Oszillator?*
Nun betrachten wir die Summe $H = H_B + H_F$, *die auf dem Tensorprodukt der Zustandsräume operiert. Zeige, dass die Operatoren*

$$Q = a^\dagger b, \qquad Q^\dagger = b^\dagger a$$

mit H *vertauschen. Was folgt daraus für das Spektrum von* H*? Welche Zustände sind entartet? Zeige dass*

$$\{Q, Q^\dagger\} = \frac{1}{\hbar\omega}H.$$

Lösung. Definiere $N_F := b^\dagger b \quad \Rightarrow \quad N_F^\dagger = (b^\dagger b)^\dagger = b^\dagger b$.
$\Rightarrow N_F = N_F^\dagger$ hermitesch.

$$\begin{aligned} N_F(1 - N_F) &= b^\dagger b(1 - b^\dagger b) = b^\dagger bbb^\dagger = 0 \\ N_F(1 - N_F)\,|n_F\rangle &= n_F(1 - n_F)\,|n_F\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad n_F \in \{0, 1\} \\ \rightarrow H\,|\psi\rangle &= \frac{1}{2}\hbar\omega(2N_F - 1)\,|n_F\rangle = E\,|n_F\rangle \\ H_F\,|0\rangle &= -\frac{1}{2}\hbar\omega\,|0\rangle \\ H_F\,|1\rangle &= \frac{1}{2}\hbar\omega\,|1\rangle \end{aligned}$$

Auf- und Absteigeoperatoren:
Berechne zunächst

$$[N_F, b] = \underbrace{b^\dagger bb}_{=0} - bb^\dagger b = -b(1 - bb^\dagger = -b$$
$$[N_F, b^\dagger] = b^\dagger bb^\dagger - \underbrace{b^\dagger b^\dagger b}_{=0} = b^\dagger(1 - b^\dagger b) = b^\dagger$$

Die Eigenzustände des Teilchenzahloperators sind gegeben durch $N_F |n_f\rangle = n_f |n_f\rangle \quad \Rightarrow \quad bN_F |n_f\rangle = n_F b |n_F\rangle$. Mit $N_F b - bN_F = -b$ ergibt sich daraus

$$(N_F b + b) |n_F\rangle = n_F b |nf\rangle \quad \Rightarrow \quad N_F (b |n_F\rangle) = (n_F - 1) (b |n_f\rangle)$$

Man sieht also, dass $b^\dagger$ und b gerade Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren für Fermionen darstellen. Es gilt also:

$$b |n_F\rangle = \mathcal{N} |n_F - 1\rangle, \qquad b^\dagger |n_F\rangle = \mathcal{N}^* |n_F + 1\rangle,$$

wobei $\mathcal{N}$ eine Normierungskonstante ist. Desweiteren fordert man $b|0\rangle = 0$ und $b^\dagger |1\rangle = 0$.

$$\begin{aligned}
[H, Q] &= \left[\frac{1}{2}\hbar\omega(a^\dagger a + aa^\dagger + b^\dagger b - bb^\dagger), a^\dagger b\right] \\
&= \frac{1}{2}\hbar\omega \left((aa^\dagger a^\dagger - a^\dagger a^\dagger a)b - 2a^\dagger bb^\dagger b\right) \\
&= \frac{1}{2}\hbar\omega \left([a, a^\dagger a^\dagger]b - 2a^\dagger bb^\dagger b\right) \\
&= \frac{1}{2}\hbar\omega \left(([a, a^\dagger]a^\dagger + a^\dagger[a, a^\dagger]) - 2a^\dagger bb^\dagger b\right) \\
&= \frac{1}{2}\hbar\omega(2a^\dagger b - 2a^\dagger bb^\dagger b) = \hbar\omega a^\dagger b(1 - b^\dagger b) = \hbar\omega a^\dagger bbb^\dagger = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[H, Q^\dagger] &= \frac{1}{2}\hbar\omega \left[a^\dagger a + aa^\dagger + b^\dagger b - bb^\dagger, b^\dagger a\right] \\
&= \frac{1}{2}\hbar\omega \left(a^\dagger ab^\dagger a + aa^\dagger b^\dagger a + b^\dagger bb^\dagger a - b^\dagger aa^\dagger a - b^\dagger aaa^\dagger - b^\dagger ab^\dagger b + b^\dagger abb^\dagger\right) \\
&= \frac{1}{2}\hbar\omega \left(2b^\dagger bb^\dagger a + b^\dagger(a^\dagger aa - aaa^\dagger)\right) \\
&= \frac{1}{2}\hbar\omega \left(2b^\dagger bb^\dagger a + b^\dagger(a[a^\dagger, a] + [a^\dagger, a]a)\right) \\
&= \hbar\omega(b^\dagger bb^\dagger a - b^\dagger a = \hbar\omega ab^\dagger(bb^\dagger - 1) = 0
\end{aligned}$$

Die Kommutatorregeln bedeuten, dass die Energie bei der Transformation mit den Q's erhalten ist. Da die Zustände $|n_B, 0\rangle$ und $|n_B - 1, 1\rangle$ die selbe Energie haben, sind die Zustände zweifach entartet. Ausnahme ist der Grundzustand, er ist nicht entartet.

$$H = \frac{1}{2}\hbar\omega(a^\dagger a + aa^\dagger + b^\dagger b - bb^\dagger) = \hbar\omega(a^\dagger a + b^\dagger b) = \hbar\omega(N_B + N_F)$$

$$\begin{aligned}
\{Q, Q^\dagger\} &= \{a^\dagger b, b^\dagger a\} = a^\dagger b b^\dagger a + b^\dagger a a^\dagger b \\
&= a^\dagger a(1 - b^\dagger b) + (a^\dagger a + 1) b^\dagger b = N_B + N_F = H \frac{1}{\hbar\omega}
\end{aligned}$$