Übung 1. *[Erwartungswerte der Operatoren des harmonischen Oszillators]*

Gegeben sei der Hamilton-Operator

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{x}^2 \tag{1}$$

eines eindimensionalen harmonischen Oszillators. Gib die Erwartungswerte der kinetischen und potentiellen Energie von H bezüglich beliebiger Energieeigenfunktionen an.

Übung 2. ***[Matrixdarstellung des harmonischen Oszillators]***

Gebe die Matrixdarstellung der Operatoren a,$a^\dagger$,p,x bezüglich des Orthonormalsystems der Energieeigenzustände $|n\rangle$ des harmonischen Oszillators an, d.h. berechne das Skalarprodukt zwischen $|m\rangle$ und $a\,|n\rangle$ usw. für beliebige m und n. Berechne durch Matrixmultiplikation den Kommutator $[x, p]$, sowie den Hamiltonoperator $H = \frac{1}{2}\left(m\omega^2 x^2 + \frac{p^2}{m}\right)$.

Übung 3. ***[Phasenraum des harmonischen Oszillators]***

Betrachte die Hamiltonfunktion $H(p, x)$ des (klassischen) eindimensionalen harmonischen Oszillators. Welche Form hat die Kurve $H(p, x) = E$ im Phasenraum? Berechne das Phasenraumvolumen $V_{PR}(E) = \int dx \int dp$, das von dieser Kurve eingeschlossen wird. Aus den bekannten Energieeigenwerten des quantenmechanischen harmonischen Oszillator $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$ folgt die Anzahl N_E der Zustände mit $E_n \leq E$. Stelle den Zusammenhang zwischen dieser Anzahl N_E und dem Phasenraumvolumen $V_{PR}(E)$ her.

Übung 4. ***[Oszillator mit Wand]***

Bestimme ohne explizite Berechnung, allein aus Kenntnis des Spektrums und der Eigenschaften der Eigenfunktionen des quantenmechanischen harmonischen Oszillators, die Energieeigenwerte und Eigenfunktionen für ein Teilchen im Potential

$$V(x) = \begin{cases} \infty & (x < 0) \\ m\omega^2 x^2/2 & (x \geq 0)\,. \end{cases} \tag{2}$$

Übung 5. ***[optional: Supersymmetrie]***

Der Hamiltonoperator des eindimensionalen harmonischen Oszillators lautet
$H_B = \frac{1}{2}\hbar\omega(a^\dagger a + aa^\dagger)$, wobei die Erzeuger und Vernichter $a^\dagger$,a die Vertauschungsrelationen

$$[a, a^\dagger] = 1, \qquad [a, a] = [a^\dagger, a^\dagger] = 0$$

erfüllen. Wir definieren nun ein ähnliches System mit dem Hamiltonoperator

$$H_F = \frac{1}{2}\hbar\omega\left(b^\dagger b - bb^\dagger\right),$$

wobei

$$\{b, b^\dagger\} = 1, \qquad \{b, b\} = \{b^\dagger, b^\dagger\} = 0.$$

Hierbei bezeichnet $\{\cdot, \cdot\}$ den Antikommutator, allgemein $\{A, B\} \equiv AB + BA$.
Bestimme zunächst die Eigenwerte von H_F. Gibt es eine Besetzungszahldarstellung und Auf- und Absteigeoperatoren analog zum gewöhnlichen harmonischen Oszillator?
Nun betrachten wir die Summe $H = H_B + H_F$, die auf dem Tensorprodukt der Zustandsräume operiert. Zeige, dass die Operatoren

$$Q = a^\dagger b, \qquad Q^\dagger = b^\dagger a$$

mit H vertauschen. Was folgt daraus für das Spektrum von H? Welche Zustände sind entartet?
Zeige dass

$$\{Q, Q^\dagger\} = \frac{1}{\hbar\omega} H.$$