Übung 1. *[Eichinvarianz]*

Betrachte ein Teilchen mit Ladung e und Masse m im elektromagnetischen Feld, das durch das Vektorpotential $\mathbf{A}$ und das elektrische Potential Φ beschrieben wird. Die Schrödingergleichung in der Ortsdarstellung ist gegeben durch

$$i\hbar\partial_t\psi(\mathbf{x},t) = \left[\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - e\mathbf{A}(\mathbf{x},t)\right)^2 + e\Phi(\mathbf{x},t)\right]\psi(\mathbf{x},t).$$

Eichtransformationen wirken wie folgt auf das elektrische Potential Φ und das Vektorpotential $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} \to \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \nabla\chi\,, \quad \Phi \to \tilde{\Phi} = \Phi - \frac{\partial\chi}{\partial t}\,, \tag{1}$$

mit der skalaren Funktion $\chi(\mathbf{x},t)$. Die Schrödingergleichung bleibt dabei forminvariant.

a) Zeige, dass die Eichtransformation

$$\tilde{\psi}(\mathbf{x},t) = \exp\left(\frac{ie}{\hbar}\chi(\mathbf{x},t)\right)\psi(\mathbf{x},t)$$

die Schrödingergleichung invariant lässt.

Physikalische Observablen müssen eichinvariant sein und somit sind deren Matrixelemente invariant unter Eichtransformationen. Zur Vereinfachung beschränken wir uns hier auf statische Felder, so dass in (1) $\Phi \to \tilde{\Phi} = \Phi$ gilt. Für eine Observable $\mathcal{O}(\mathbf{p},\mathbf{A},\Phi)$ fordern wir nun:

$$\langle\psi|\mathcal{O}(\mathbf{p},\mathbf{A},\Phi)|\psi\rangle = \left\langle\tilde{\psi}\middle|\mathcal{O}(\mathbf{p},\tilde{\mathbf{A}},\tilde{\Phi})\middle|\tilde{\psi}\right\rangle\,. \tag{2}$$

Die linke Seite kann geschrieben werden als:

$$\langle\psi|\mathcal{O}(\mathbf{p},\mathbf{A},\Phi)|\psi\rangle = \left\langle\tilde{\psi}\middle|\tilde{\mathcal{O}}(\mathbf{p},\mathbf{A},\Phi)\middle|\tilde{\psi}\right\rangle\,,$$

wobei

$$\tilde{\mathcal{O}}(\mathbf{p},\mathbf{A},\Phi) = \exp\left(\frac{ie}{\hbar}\chi\right)\mathcal{O}(\mathbf{p},\mathbf{A},\Phi)\,\exp\left(-\frac{ie}{\hbar}\chi\right)$$

die unitäre Transformation ist, die $\mathcal{O}$ nach $\tilde{\mathcal{O}}$ abbildet. Die resultierende notwendige und hinreichende Bedingung,

$$\tilde{\mathcal{O}}(\mathbf{p},\mathbf{A},\Phi) = \mathcal{O}(\mathbf{p},\tilde{\mathbf{A}},\tilde{\Phi})$$

ist genau dann erfüllt, wenn

$$\mathcal{O}(\mathbf{p},\mathbf{A},\Phi) = \mathcal{O}(\mathbf{p} - e\mathbf{A},\Phi)\,. \tag{3}$$

b) Leite unter der Annahme von (3) die Gleichung (2) her.

c) Ausgehend von der Annahme, dass der kanonische Impuls $\mathbf{p}$ eine Observable ist, was folgt aus einer analogen Herleitung zu Teil b)?

Übung 2. *[Stern-Gerlach Versuch]*

Ein Strahl von Atomen mit Spin-Quantenzahl $s = 1/2$, der keinen Bahndrehimpuls besitzt, passiert einen Stern-Gerlach Magnet, dessen Magnetfeld entlang einer Richtung D orientiert ist, die mit der z-Achse den Winkel θ bildet. Der auslaufende Teilstrahl, dessen Spins in Richtung von D ausgerichtet sind, passiere einen zweiten Stern-Gerlach Magnet, dessen Magnetfeld entlang der z-Achse orientiert ist.

Zeige, dass in den zwei Strahlen, die aus dem zweiten Magneten kommen, die Anzahl der Atome mit Spin parallel bzw. anti-parallel zur z-Achse im Verhältnis $\cot^2(\theta/2)$ vorliegen.

Übung 3. *[Clebsch-Gordan Koeffizienten]*

In dieser Aufgabe betrachten wir ein System, das sich aus zwei Spin-1/2-Teilchen zusammensetzt. Wir werden die Zerlegung des Systems in Unterräume berechnen, die bezüglich des Gesamtspindrehimpulses invariant sind. D.h. wir bestimmen die Clebsch-Gordan-Koeffizienten für $j_1 = \frac{1}{2}$ und $j_2 = \frac{1}{2}$ durch explizite Rechnung.

Um einheitliche Bezeichnungen zu haben, nennen wir die Eigenzustände zu J_1^2, J_{1z} bzw. J_2^2, J_{2z} jeweils $|j_1, m\rangle$ und $|j_2, m\rangle$ mit $m = \pm 1/2$. Wir suchen die Linearkombinationen der Produktzustände $\left|\frac{1}{2}, m\right\rangle \left|\frac{1}{2}, m'\right\rangle \equiv \left|\frac{1}{2}, m\right\rangle \otimes \left|\frac{1}{2}, m'\right\rangle$ $(m,\, m' = \pm 1/2)$, die Eigenzustände zu $\vec{J}^2$ und J_z sind, wobei $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2 \equiv \vec{J}_1 \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \vec{J}_2$.

(a) Welches sind die Eigenzustände zu J_z und ihre Eigenwerte? Welche Eigenwerte sind entartet?

(b) Bestimme die Linearkombinationen der $|1/2, m\rangle\, |1/2, m'\rangle$, die Eigenzustände zu J^2 sind. *Hinweis: Zerlege die J^2 so, dass ausser bereits diagonalisierten Operatoren nur Auf- und Absteigeoperatoren vorkommen, siehe Vorlesung.*

(c) Wie verhalten sich die gefundenen Linearkombinationen bei Vertauschen der Indizes $1 \leftrightarrow 2$? Finde eine Gemeinsamkeit innerhalb der gefundenen irreduziblen Darstellungen.