Thermodynamik
Serie 3 - Musterlösung

HS 2020
Prof. P. Jetzer

M. Haney, S. Tiwari, M. Ebersold
https://www.physik.uzh.ch/de/lehre/PHY341/

Ausgeteilt am: 06.10.20
Abzugeben bis: 13.10.20

1. Carnot-Kreisprozess

a)

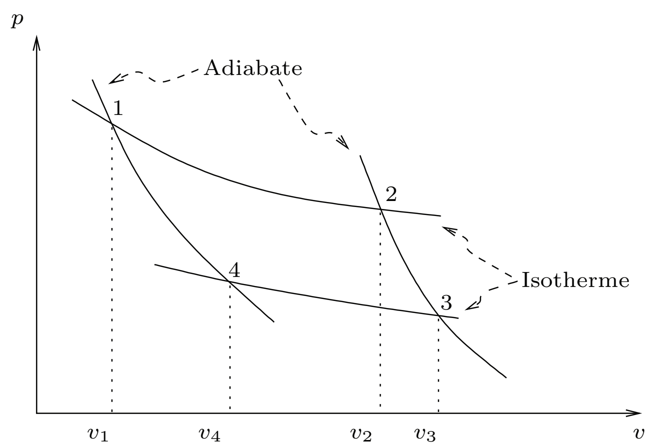

Abbildung 1: Folgende Schritte werden im Carnot-Prozess durchlaufen. Die Verwendung von Molvolumina, $v_i = V_i/n$, ist hier angebracht. Dadurch lässt sich die ideale Gasgleichung schreiben als $pv = RT$.

$1 \to 2$ Während der isothermen Expansion von $(T_1 = \vartheta_1, v_1)$ nach $(T_2 = \vartheta_1, v_2)$ wird die Arbeit

$$\Delta a_{12} = -\int_{v_1}^{v_2} p\mathrm{d}v = -R\vartheta_1 \int_{v_1}^{v_2} \frac{\mathrm{d}v}{v} = -R\vartheta_1 \log \frac{v_2}{v_1}$$

nach Innen geleistet (negativ, darum positiv nach Aussen). Aus der Volumenunabhängigkeit der inneren Energie des idealen Gases,

$$0 \equiv \int_1^2 \mathrm{d}u = \int_1^2 \delta q - \int_{v_1}^{v_2} p\mathrm{d}v = \Delta q_{12} + \Delta a_{12}.$$

folgt sofort, dass der Carnot-Maschine während der isothermen Expansion die Wärmemenge $\Delta q_{12} = -\Delta a_{12}$ zugeführt wird.

Bemerkung: $\mathrm{d}u = \delta q + \delta a$, *d.h. das System leistet Arbeit falls* $\delta a < 0$ *(es wird Arbeit am System geleistet falls* $\delta a > 0$*).*

$2 \to 3$ Da auf der Adiabaten von $(T_2 = \vartheta_1, v_2)$ nach $(T_3 = \vartheta_2, v_3)$ kein Wärmeaustausch stattfindet, $\Delta q_{23} = 0$, wird die Arbeit $\delta a = -p\mathrm{d}v = \mathrm{d}u = c_v \mathrm{d}T$ nach Innen geleistet. Deshalb finden wir sofort

$$\Delta a_{23} = \int_2^3 c_v \mathrm{d}T = c_v(T_3 - T_2) = -c_v(\vartheta_1 - \vartheta_2).$$

Da $\vartheta_1 > \vartheta_2$, ist Δa_{23} negativ und so ist die Arbeit nach Aussen abgegeben.

$3 \to 4$ Während der isothermen Kompression von $(T_3 = \vartheta_2, v_3)$ nach $(T_4 = \vartheta_2, v_4)$, leistet das System die Arbeit

$$\Delta a_{34} = R\vartheta_2 \log \frac{v_3}{v_4},$$

wodurch effektiv Arbeit dem System zugeführt werden muss. Gleichzeitig wird die Wärmemenge $\Delta q_{34} = -\Delta a_{34} < 0$ aufgenommen, was also einer Wärmeabgabe $|\Delta q_{34}|$ entspricht.

$4 \to 1$ Die während der adiabatischen Kompression von $(T_4 = \vartheta_2, V_4)$ nach $(T_1 = \vartheta_1, v_1)$ geleistete Arbeit (nach Innen) ist

$$\Delta a_{41} = c_v(\vartheta_1 - \vartheta_2),$$

wobei kein Wärmeaustausch stattfindet, $\Delta q_{41} = 0$.

Damit ist der Anfangszustand wieder erreicht. Die bei einem Umlauf am System geleistete Arbeit a ist

$$a = \Delta a_{12} + \Delta a_{23} + \Delta a_{34} + \Delta a_{41} = -R\vartheta_1 \log \frac{v_2}{v_1} - R\vartheta_2 \log \frac{v_4}{v_3}.$$

Mit Hilfe der Adiabatengleichungen

$$\vartheta_1 v_2^{\gamma-1} = \vartheta_2 v_3^{\gamma-1}, \tag{1}$$

$$\vartheta_1 v_1^{\gamma-1} = \vartheta_2 v_4^{\gamma-1}, \tag{2}$$

erhalten wir $v_2/v_1 = v_3/v_4$ und finden somit für die totale Arbeit den Ausdruck

$$a = -R(\vartheta_1 - \vartheta_2) \log \frac{v_2}{v_1}.$$

Letztere ist mit $\vartheta_1 > \vartheta_2$ und $v_2 > v_1$ negativ, sodass die Arbeit von der Carnot-Maschine an der Umgebung geleistet wird. Mit der eingespeisten Wärme $\Delta q_{\text{in}} = \Delta q_{12}$ finden wir schliesslich für den Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{-a}{\Delta q_{\text{in}}} = \frac{R(\vartheta_1 - \vartheta_2) \log \frac{v_2}{v_1}}{R\vartheta_1 \log \frac{v_2}{v_1}} = 1 - \frac{\vartheta_2}{\vartheta_1}.$$

Die Wärme Δq_{34} ist reine Abwärme und somit ein "Abfallprodukt" des Prozesses.

b) Sobald der Kolben das minimale Volumen erreicht hat, wird der Zylindermotor an das Wärmereservoir bei der Temperatur ϑ_1 angeschlossen (siehe Abbildung 2). Die Temperatur des Gases ist zu diesem Zeitpunkt ebenfalls ϑ_1. Daraufhin expandiert der Kolben isotherm. An einem gewissen Punkt (siehe Teilaufgabe c)) wird das Reservoir abgehängt und der Kolben expandiert adiabatisch weiter. Erreicht der Kolben die maximale Ausdehnung ($T_{\text{Gas}} = \vartheta_2$), so wird das Wärmebad ϑ_2 angeschlossen und der Kolben zieht sich isotherm zusammen. Schliesslich wird das Bad wieder abgehängt, so dass der Kolben die ursprüngliche Position adiabatisch erreicht.

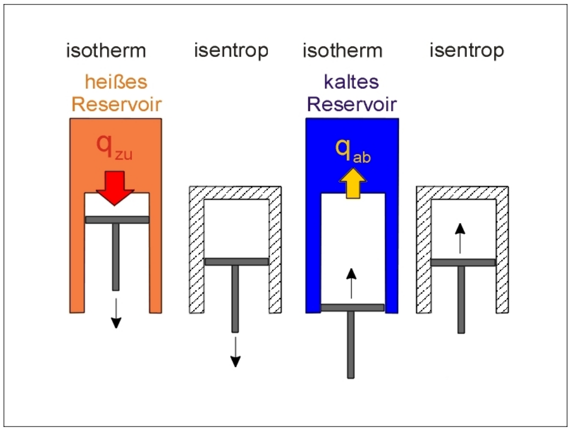

Abbildung 2: Schematischer Ablauf des rechtslaufenden Carnot-Prozesses. Die Pfeile stellen die Bewegungsrichtung des Kolbens dar. Die adiabatischen Abschnitte sind für diesen reversiblen Prozess isentrop. *Quelle: http://de.wikipedia.org/*

c) Einem Zylindermotor, welcher den Carnot-Kreisprozess zwischen ϑ_1 und ϑ_2 realisiert, sind natürliche Grenzen gesetzt. Zum einen ist das maximal zulässige Volumen durch die Kolbengrösse gegeben. Diese Bedingung liefert einen maximalen Wert für $v_3 = v_{\max}$. Zusammen mit ϑ_2 ist damit die Position von Punkt 3 in Abbildung 1 festgelegt.
Im Punkt 1 von Abbildung 1 ist der maximal zulässige Druck der limitierende Faktor ($p_1 = p_{\max}$). Dieser hängt in erster Linie vom Dichtungsring am Zylinderkolben ab. Durch die Grössen (ϑ_1, ϑ_2, $p_{\max}$, $v_{\max}$) sind die Eckpunkte des Carnot-Kreisprozesses auf eindeutige Weise bestimmt. Nutzt man nämlich die Adiabatengleichungen (1) und (2) sowie die Gleichungen für die Isothermen

$$p_1 v_1 = p_2 v_2 = R\vartheta_1, \tag{3}$$
$$p_3 v_3 = p_4 v_4 = R\vartheta_2, \tag{4}$$

so findet man nach einigen Umformungen die genaue Position der Eckpunkte (siehe Tabelle 1).

Eckpunkt i	T_i	p_i	v_i
1	ϑ_1	$p_{\max}$	$\dfrac{R\vartheta_1}{p_{\max}}$
2	ϑ_1	$\dfrac{R\vartheta_1}{v_{\max}}\left(\dfrac{\vartheta_1}{\vartheta_2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$	$v_{\max}\left(\dfrac{\vartheta_2}{\vartheta_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$
3	ϑ_2	$\dfrac{R\vartheta_2}{v_{\max}}$	$v_{\max}$
4	ϑ_2	$p_{\max}\left(\dfrac{\vartheta_2}{\vartheta_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$	$\dfrac{R\vartheta_2}{p_{\max}}\left(\dfrac{\vartheta_1}{\vartheta_2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$

Tabelle 1: Eckpunkte des Carnot-Prozesses als Funktion von (ϑ_1, ϑ_2, $p_{\max}$, $v_{\max}$).

2. Escher-Wyss-Kreisprozess

a) Wir berechnen nun für einen Escher-Wyss-Kreisprozess die auf den einzelnen Zyklusabschnitten geleisteten Arbeitsmengen und die jeweils zu-/abgeführte Wärmemenge.

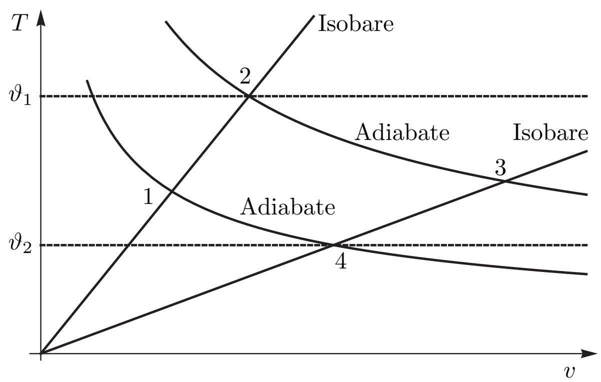

Abbildung 3: Schematische Darstellung des Escher-Wyss-Kreisprozesses. Diese Maschine wird zwischen zwei Isobaren ($p = \text{const.} \Rightarrow T \propto V$) und zwei adiabatischen Abschnitten betrieben.

$1 \to 2$ Auf diesem Abschnitt ist der Druck konstant ($p = p_A$) und die Arbeit, welche am System geleistet wird, berechnet sich als

$$\Delta a_{12} = -\int_{v_1}^{v_2} p_A \mathrm{d}v = -p_A(v_2 - v_1) = -R(T_2 - T_1).$$

Das ist negativ, so wird Arbeit nach Aussen gemacht. Die innere Energie des idealen Gases hängt nur von der Temperatur ab und dessen Änderung auf dem Abschnitt ist somit

$$\Delta u_{12} = c_v(T_2 - T_1).$$

Mithilfe des ersten Hauptsatzes können wir die dem System zugeführte Wärme berechnen und finden

$$\Delta q_{12} = \Delta u_{12} - \Delta a_{12} = (c_v + R)(T_2 - T_1) = c_p(T_2 - T_1).$$

$2 \to 3$ Dieser Abschnitt verläuft adiabatisch und somit ist $\Delta q_{23} = 0$. Dadurch vereinfacht sich die Berechnung der zugeführten Arbeit zu

$$\Delta a_{23} = \Delta u_{23} = c_v(T_3 - T_2).$$

$3 \to 4$ Wie in Abschnitt $1 \to 2$ ist der Druck konstant ($p = p_B$) und wir finden

$$\Delta a_{34} = -\int_{v_3}^{v_4} p_B \mathrm{d}v = -p_B(v_4 - v_3) = -R(T_4 - T_3),$$

und mit dem ersten Hauptsatz

$$\Delta q_{34} = \Delta u_{34} - \Delta a_{34} = (c_v + R)(T_4 - T_3) = c_p(T_4 - T_3).$$

$4 \to 1$ Der letzte Abschnitt verläuft adiabatisch und somit finden wir neben $\Delta q_{41} = 0$,

$$\Delta a_{41} = c_v(T_1 - T_4).$$

Für die auf einem Kreiszyklus zugeführte Arbeit finden wir

$$a = \Delta a_{12} + \Delta a_{23} + \Delta a_{34} + \Delta a_{41} = -c_p(T_2 + T_4 - T_1 - T_3).$$

Da die Wärmemenge Δq_{12} die zugeführte Wärme ins System ist, finden wir den Wirkungsgrad als

$$\eta = \frac{-a}{\Delta q_{12}} = \frac{c_p(T_2 + T_4 - T_1 - T_3)}{c_p(T_2 - T_1)} = 1 - \frac{T_3 - T_4}{T_2 - T_1}$$

Da entlang von Adiabaten $p^{1-\gamma}T^{\gamma} = \text{const.}$ gilt, finden wir die Relationen

$$\begin{aligned} p_A^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} T_1 &= p_B^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} T_4, \\ p_A^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} T_2 &= p_B^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} T_3. \end{aligned} \tag{5}$$

Mithilfe dieser Relationen sehen wir, dass wir den Wirkungsgrad schreiben können als

$$\eta = 1 - \frac{T_4}{T_1} = 1 - \frac{T_3}{T_2}.$$

b) Mit den Relationen (5) lässt sich der Wirkungsgrad auch als Funktion der Drücke der beiden Isobaren schreiben, nämlich

$$\eta = 1 - \left(\frac{p_B}{p_A}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}. \tag{6}$$

Auch die Arbeit lässt sich als Funktion der von Aussen vorgegebenen Grössen p_A, p_B, ϑ_1 und ϑ_2 schreiben als

$$a = -c_p\Big[\vartheta_1\Big(1 - \Big(\frac{p_B}{p_A}\Big)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\Big) + \vartheta_2\Big(1 - \Big(\frac{p_A}{p_B}\Big)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\Big)\Big]. \tag{7}$$

c) Der Kreisprozess arbeitet als Kraftmaschine für $a \leq 0$. Mit $a = 0$ findet man den minimalen und maximalen Druck. Der maximale Druck $p_{B,\max}$ ist gegeben durch p_A, also $p_{B,\max} = p_A$. Für den minimalen Druck findet man

$$p_{B,\min} = p_A\Big(\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1}\Big)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}.$$

d) Den maximalen Wirkungsgrad erhalten wir offensichtlicherweise wenn der Druck p_B minimal ist, also $p_B = p_{B,\min}$. Wenn wir dies in den Wirkungsgrad einsetzen, erhalten wir

$$\eta = 1 - \frac{\vartheta_2}{\vartheta_1},$$

was dem Carnot-Wirkungsgrad enspricht. Für diese Wahl von p_B findet man nun aber, dass

$$a = -c_p\Big[\vartheta_1\Big(1 - \frac{\vartheta_2}{\vartheta_1}\Big) + \vartheta_2\Big(1 - \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}\Big)\Big] = 0.$$

Somit arbeitet die Maschine zwar mit einem optimalen Wirkungsgrad, erzeugt aber keine Arbeit.

e) Indem wir $a(\vartheta_1, \vartheta_2, p_A, p_B)$ nach p_B maximieren, finden wir das optimale p_B gegeben durch die Beziehung

$$\frac{p_B}{p_A} = \left(\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1}\right)^{\frac{\gamma}{2(\gamma-1)}}. \tag{8}$$

Indem wir dieses Ergebnis in die Ausdrücke für den Wirkungsgrad (6) und die Arbeit (7) einsetzen, erhalten wir

$$\begin{aligned} \eta &= 1 - \sqrt{\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1}}, \\ a &= -c_p\Big(\sqrt{\vartheta_1} - \sqrt{\vartheta_2}\Big)^2. \end{aligned}$$

f) Um den aus ökonomischer Sicht optimalen Druck p_B zu bestimmen müssen wir

$$K_a a - K_q \Delta q_{12} = K_a a - K_q \frac{a}{\eta}$$

maximieren. Indem wir durch die von p_B unabhängige Grösse $c_p \vartheta_1 K_a$ teilen, erhalten wir

$$(1-y)\Big(1 - \frac{\vartheta_2/\vartheta_1}{y}\Big) - \frac{K_q}{K_a}\Big(1 - \frac{\vartheta_2/\vartheta_1}{y}\Big),$$

wobei wir $y = (p_B/p_A)^{(\gamma-1)/\gamma}$ eingeführt haben. Dieser Ausdruck wird maximal für

$$y = \sqrt{\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1}}\sqrt{1 - \frac{K_q}{K_a}}. \tag{9}$$

Aus der Beschränkung der erlaubten p_B-Werte erhalten wir für y die Einschränkung

$$\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1} \leq y \leq 1.$$

Die rechte Ungleichung ist immer erfüllt für $\vartheta_2 < \vartheta_1$ und $K_q < K_a$. Wegen der linken Ungleichung ist die Lösung (9) ausserhalb des erlaubten Bereiches falls

$$\frac{K_q}{K_a} > 1 - \frac{\vartheta_2}{\vartheta_1}.$$

Wir finden nun insgesamt

$$y = \left(\frac{p_B}{p_A}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \begin{cases} \sqrt{\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1}}\sqrt{1 - \frac{K_q}{K_a}}, & \frac{K_q}{K_a} \leq 1 - \frac{\vartheta_2}{\vartheta_1}, \\ \frac{\vartheta_2}{\vartheta_1}, & \frac{K_q}{K_a} > 1 - \frac{\vartheta_2}{\vartheta_1}, \end{cases} \tag{10}$$

Wir erkennen, dass für $K_q/K_a \to 0$ der ökonomisch optimale Arbeitsmodus für die maximale Arbeit pro Zyklus realisiert wird (Vgl. Gl. (10) für $K_q/K_a = 0$ mit (8)).

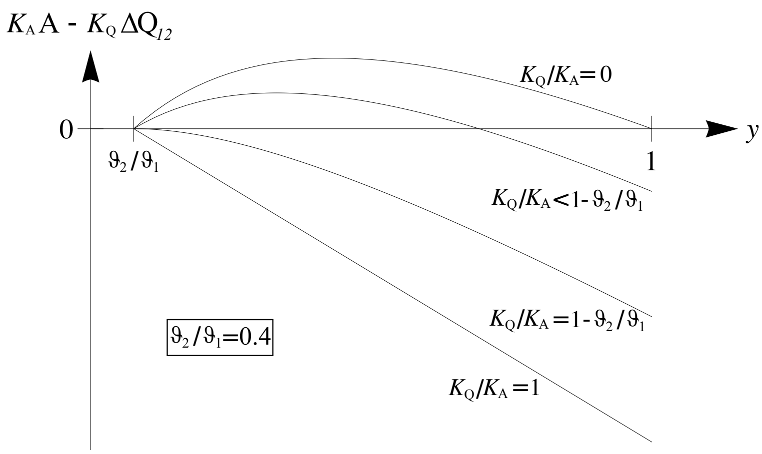

Abbildung 4: Die Grösse $K_a a - K_q \Delta q_{12}$ gilt es ökonomisch zu maximieren. So findet man den optimalen Druck p_B, bei dem die Escher-Wyss-Maschine betrieben werden soll. Hier wird diese Grösse als Funktion von $y = (p_B/p_A)^{(\gamma-1)/\gamma}$ für verschiedene Verhältnisse K_q/K_a und für $\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1} = 0.4$ dargestellt. Nur für $\frac{K_q}{K_a} \leq 1 - \frac{\vartheta_2}{\vartheta_1}$ existiert ein Maximum > 0.