Übung 1. *[Compton-Streuung]*

Betrachte die elastische Streuung eines Photons mit Energie und Impuls $(cp_1,\vec{p_1})$ an einem Elektron in Ruhe, dessen Energie und Impuls $(mc^2,\vec{0})$ beträgt. $(cp_2,\vec{p_2})$ bezeichnet Energie und Impuls des gestreuten Photons, und $(c\sqrt{m^2c^2+\vec{p}^2},\vec{p})$ Energie und Impuls des Elektrons nach der Kollision. Da elastische Streuung angenommen wird, sind Gesamtenergie und Gesamtimpuls erhalten. Zeige, dass unter dieser Voraussetzung

$$\frac{1}{\nu_2}-\frac{1}{\nu_1}=\frac{h}{mc^2}(1-\cos\theta) \tag{1}$$

gilt, wobei ν_i die Frequenz des Photons vor bzw. nach der Streuung ist und $cp_i = h\nu_i$.
θ ist der Streuwinkel, d.h. der Winkel zwischen $\vec{p_1}$ und $\vec{p_2}$. Die Grösse $\frac{h}{mc}$ wird auch als Compton-Wellenlänge des Elektrons bezeichnet.

Übung 2. *[Galilei-Invarianz der Schrödinger Gleichung]*

Sei $\Psi(x,t)$ eine Lösung der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung eines freien Teilchens, d.h.

$$\mathrm{i}\hbar\partial_t\Psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\Psi(x,t)\,. \tag{2}$$

Zeige, dass für jedes konstante u auch

$$\Psi_u(x,t)=\Psi(x-ut,t)\exp\left[\frac{\mathrm{i}m}{\hbar}\left(ux-\frac{1}{2}u^2t\right)\right] \tag{3}$$

eine Lösung der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung eines freien Teilchens ist.

Übung 3. *[Poisson-Klammern in der klassischen Mechanik]*

Seien F und G zwei beliebige Funktionen der kanonischen Variablen q_k, p_k und f die Anzahl der Freiheitsgrade des betrachteten Systems. Man definiert die *Poisson*-Klammer durch

$$[F,G]\equiv\sum_{k=1}^{f}\left(\frac{\partial F}{\partial q_k}\frac{\partial G}{\partial p_k}-\frac{\partial F}{\partial p_k}\frac{\partial G}{\partial q_k}\right)\,. \tag{4}$$

a) Zeige, dass die Beziehungen

$$[F,F]=0,\qquad [F,G]=-[G,F]\,,\qquad [F,G_1+G_2]=[F,G_1]+[F,G_2]\,, \tag{5}$$

$$\frac{\partial F}{\partial q_i}=[F,p_i]\,,\qquad \frac{\partial F}{\partial p_i}=-[F,q_i] \tag{6}$$

gelten.

b) Zeige, dass für die kanonischen Variablen q_k, p_k

$$[q_i,q_j]=[p_i,p_j]=0,\qquad [q_i,p_j]=\delta_{ij} \tag{7}$$

gilt.

c) Sei $H = H(q_1, \ldots, q_f, p_1, \ldots, p_f, t)$ die *Hamilton*-Funktion eines Systems. Zeige, dass man die kanonischen Gleichungen

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, \ldots, f) \tag{8}$$

auch als

$$\dot{q}_i = [q_i, H], \quad \dot{p}_i = [p_i, H] \tag{9}$$

schreiben kann.

d) Zeige, dass für die totale Zeitableitung einer Funktion $F(q_1, \ldots, q_f, p_1, \ldots, p_f, t)$

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + [F, H] \tag{10}$$

gilt.