Übung 1. *[Compton-Streuung]*

Betrachte die elastische Streuung eines Photons mit Energie und Impuls (cp_1,$\vec{p_1}$) an einem Elektron in Ruhe, dessen Energie und Impuls (mc^2,$\vec{0}$) beträgt. (cp_2,$\vec{p_2}$) bezeichnet Energie und Impuls des gestreuten Photons, und ($c\sqrt{m^2c^2+\vec{p}^2}$,$\vec{p}$) Energie und Impuls des Elektrons nach der Kollision. Da elastische Streuung angenommen wird, sind Gesamtenergie und Gesamtimpuls erhalten. Zeige, dass unter dieser Voraussetzung

$$\frac{1}{\nu_2}-\frac{1}{\nu_1}=\frac{h}{mc^2}(1-\cos\theta) \tag{1}$$

gilt, wobei ν_i die Frequenz des Photons vor bzw. nach der Streuung ist und $cp_i = h\nu_i$.
θ ist der Streuwinkel, d.h. der Winkel zwischen $\vec{p_1}$ und $\vec{p_2}$. Die Grösse $\frac{h}{mc}$ wird auch als Compton-Wellenlänge des Elektrons bezeichnet.

Lösung. Energie- und Impulserhaltung ergibt

$$p_1+mc=p_2+\sqrt{m^2c^2+p^2}, \tag{L.1}$$

$$\vec{p_1}=\vec{p_2}+\vec{p}. \tag{L.2}$$

Quadrieren beider Gleichungen führt zu

$${p_1}^2+{p_2}^2+2(p_1-p_2)mc-2p_1p_2=p^2\,, \tag{L.3}$$

$${p_1}^2+{p_2}^2-2p_1p_2\cos\theta=p^2. \tag{L.4}$$

Subtraktion der beiden Gleichungen voneinander liefert

$$p_1p_2(1-\cos\theta)-(p_1-p_2)mc=0\,. \tag{L.5}$$

Durch Einsetzen von $cp_i = h\nu_i$ erhält man das gewünschte Resultat

$$\frac{1}{\nu_2}-\frac{1}{\nu_1}=\frac{h}{mc^2}(1-\cos\theta)\,. \tag{L.6}$$

Übung 2. *[Galilei-Invarianz der Schrödinger Gleichung]*

Sei $\Psi(x,t)$ eine Lösung der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung eines freien Teilchens, d.h.

$$\mathrm{i}\hbar\partial_t\Psi(x,t)=-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\Psi(x,t)\,. \tag{2}$$

Zeige, dass für jedes konstante u auch

$$\Psi_u(x,t)=\Psi(x-ut,t)\exp\left[\frac{\mathrm{i}m}{\hbar}\left(ux-\frac{1}{2}u^2t\right)\right] \tag{3}$$

eine Lösung der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung eines freien Teilchens ist.

Lösung. Durch die Transformation $x \to x(t) = x - ut$ folgt für die partielle Ableitung

$$\frac{\partial F\,(x,t)}{\partial t} \to \frac{\partial F\,(x(t),t)}{\partial t} + \frac{\partial F\,(x(t),t)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}. \tag{L.7}$$

Daher erhält man

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\hbar\partial_t\Psi_u(x,t) &= \left\{\frac{mu^2}{2}\Psi(x-ut,t) + \mathrm{i}\hbar\partial_t\left[\Psi(x-ut,t)\right]\right\}\exp\left(\dots\right) \qquad \text{(L.8)} \\ &= \left\{\frac{mu^2}{2}\Psi(x-ut,t) + \mathrm{i}\hbar\left[\partial_t\Psi\right](x-ut,t) - \mathrm{i}\hbar u\left[\partial_x\Psi\right](x-ut,t)\right\}\exp\left(\dots\right) \end{aligned}$$

und

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\Psi_u(x,t) = \left\{\frac{mu^2}{2}\Psi(x-ut,t) - \mathrm{i}\hbar u\left[\partial_x\Psi\right](x-ut,t) - \frac{\hbar^2}{2m}\left[\partial_x^2\Psi\right](x-ut,t)\right\}\exp\left(\dots\right). \tag{L.9}$$

Zieht man die zweite von der ersten Gleichung ab, so ergibt sich

$$\mathrm{i}\hbar\partial_t\Psi_u(x,t) + \frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\Psi_u(x,t) = \exp\left(\dots\right)\left[\mathrm{i}\hbar\partial_t\Psi + \frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\Psi\right](x-ut,t) = 0\,, \tag{L.10}$$

wobei wir im letzten Schritt benutzt haben, dass $\Psi(x,t)$ die Schrödinger-Gleichung löst.

Übung 3. *[Poisson-Klammern in der klassischen Mechanik]*

Seien F und G zwei beliebige Funktionen der kanonischen Variablen q_k, p_k und f die Anzahl der Freiheitsgrade des betrachteten Systems. Man definiert die Poisson-Klammer durch

$$[F,G] \equiv \sum_{k=1}^{f}\left(\frac{\partial F}{\partial q_k}\frac{\partial G}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k}\frac{\partial G}{\partial q_k}\right). \tag{4}$$

a) *Zeige, dass die Beziehungen*

$$[F,F] = 0, \qquad [F,G] = -\left[G,F\right], \qquad [F, G_1 + G_2] = [F,G_1] + [F,G_2]\,, \tag{5}$$

$$\frac{\partial F}{\partial q_i} = [F,p_i]\,, \qquad \frac{\partial F}{\partial p_i} = -\left[F,q_i\right] \tag{6}$$

gelten.

b) *Zeige, dass für die kanonischen Variablen q_k, p_k*

$$[q_i,q_j] = [p_i,p_j] = 0, \qquad [q_i,p_j] = \delta_{ij} \tag{7}$$

gilt.

c) *Sei $H = H\left(q_1,\dots,q_f,p_1,\dots,p_f,t\right)$ die Hamilton-Funktion eines Systems. Zeige, dass man die kanonischen Gleichungen*

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (i = 1,\dots,f) \tag{8}$$

auch als

$$\dot{q}_i = [q_i,H]\,, \qquad \dot{p}_i = [p_i,H] \tag{9}$$

schreiben kann.

d) *Zeige, dass für die totale Zeitableitung einer Funktion $F\left(q_1,\dots,q_f,p_1,\dots,p_f,t\right)$*

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + [F,H] \tag{10}$$

gilt.

Lösung.

a) Die ersten beiden Gleichungen folgen direkt aus der Definition der *Poisson*-Klammern, die dritte aus der Linearität des Differentials. Weiterhin gilt (analog für $[F, q_i]$)

$$[F, p_i] = \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial F}{\partial q_k}\frac{\partial p_i}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k}\frac{\partial p_i}{\partial q_k} \tag{L.11}$$

und mit

$$\frac{\partial p_i}{\partial p_k} = \delta_{ik}, \qquad \frac{\partial p_i}{\partial q_k} = 0 \tag{L.12}$$

folgt

$$\frac{\partial F}{\partial q_i} = [F, p_i]\,. \tag{L.13}$$

b) Allgemein gilt

$$\frac{\partial p_i}{\partial p_k} = \frac{\partial q_i}{\partial q_k} = \delta_{ik}, \qquad \frac{\partial p_i}{\partial q_k} = \frac{\partial q_i}{\partial p_k} = 0, \qquad \delta_{ik}\delta_{jk} = \delta_{ij}. \tag{L.14}$$

Daher findet man

$$[q_i, q_j] = \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial q_i}{\partial q_k}\frac{\partial q_j}{\partial p_k} - \frac{\partial q_i}{\partial p_k}\frac{\partial q_j}{\partial q_k} = 0\,, \tag{L.15}$$

$$[p_i, p_j] = \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial p_i}{\partial q_k}\frac{\partial p_j}{\partial p_k} - \frac{\partial p_i}{\partial p_k}\frac{\partial p_j}{\partial q_k} = 0\,, \tag{L.16}$$

$$[q_i, p_j] = \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial q_i}{\partial q_k}\frac{\partial p_j}{\partial p_k} - \frac{\partial q_i}{\partial p_k}\frac{\partial p_j}{\partial q_k} = \delta_{ij}\,. \tag{L.17}$$

c)

$$[q_i, H] = \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial q_i}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial q_i}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q_k} = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i\,. \tag{L.18}$$

Analog für $\dot{p}_i$.

d)

$$\begin{aligned}
\frac{dF}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial F}{\partial q_k}\frac{\partial q_k}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial p_k}\frac{\partial p_k}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial F}{\partial q_k}[q_k, H] + \frac{\partial F}{\partial p_k}[p_k, H] \\
&= \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial F}{\partial q_k} \sum_{m=1}^{f} \left\{ \frac{\partial q_k}{\partial q_m}\frac{\partial H}{\partial p_m} - \frac{\partial q_k}{\partial p_m}\frac{\partial H}{\partial q_m} \right\} + \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial F}{\partial p_k} \sum_{m=1}^{f} \left\{ \frac{\partial p_k}{\partial q_m}\frac{\partial H}{\partial p_m} - \frac{\partial p_k}{\partial p_m}\frac{\partial H}{\partial q_m} \right\} \\
&= \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial F}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q_k} \\
&= \frac{\partial F}{\partial t} + [F, H]\,.
\end{aligned} \tag{L.19}$$