Übung 1. *[Eigenschaften des Bahndrehimpulsoperators]*

Gegeben sei der Bahndrehimpulsoperator $\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p}$ mit dem Ortsoperator $\vec{x} = (x, y, z)$.

a) *Zeige, dass der Bahndrehimpulsoperator hermitesch ist.*

b) *Berechne mit Hilfe der fundamentalen Vertauschungsrelationen zwischen Ort und Impuls die folgenden Kommutatoren:*

   i) $[L_i, L_j]$,
   ii) $[\vec{L}^2, L_i]$,
   iii) $[L_i, x_j]$,
   iv) $[L_i, \vec{x}^{\,2}]$,
   v) $[L_i, p_j]$,
   vi) $[L_i, \vec{p}^{\,2}]$,

c) *Zeige, dass die Relation*

$$[\vec{L}^2, [\vec{L}^2, x_j]] = 2\hbar^2 \left(\vec{L}^2 x_j + x_j \vec{L}^2\right) \tag{1}$$

erfüllt ist.

Lösung.

a) Mit $L_i = \epsilon_{imn} x_m p_n$ gilt

$$\begin{aligned} L_i^\dagger &= \epsilon_{imn} \left(x_m p_n\right)^\dagger \\ &= \epsilon_{imn} p_n^\dagger x_m^\dagger \\ &= \epsilon_{imn} p_n x_m \\ &= \epsilon_{imn} x_m p_n \\ &= L_i \,. \end{aligned} \tag{L.1}$$

Für $m \neq n$ dürfen x_m und p_n vertauscht werden, im Fall $m = n$ ist $\epsilon_{imn} = 0$.

b) Hier und im Folgenden verwenden wir $[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$ und $\epsilon_{mni}\epsilon_{mjk} = \delta_{nj}\delta_{ik} - \delta_{nk}\delta_{ij}$:

   i)

$$\begin{aligned} [L_i, L_j] &= \epsilon_{imn}\epsilon_{jkl}[x_m p_n, x_k p_l] \\ &= \epsilon_{imn}\epsilon_{jkl}\left(x_m x_k [p_n, p_l] + x_m [p_n, x_k] p_l + x_k [x_m, p_l] p_n + [x_m, x_k] p_n p_l\right) \\ &= \mathrm{i}\hbar\epsilon_{imn}\epsilon_{jkl}\left(x_k p_n \delta_{ml} - x_m p_l \delta_{nk}\right) \\ &= \mathrm{i}\hbar\left(\epsilon_{mni}\epsilon_{mjk} x_k p_n - \epsilon_{nim}\epsilon_{nlj} x_m p_l\right) \\ &= \mathrm{i}\hbar\left(x_i p_j - x_k p_k \delta_{ij} - x_j p_i + x_m p_m \delta_{ij}\right) \\ &= \mathrm{i}\hbar\epsilon_{ijk} L_k \,. \end{aligned} \tag{L.2}$$

ii)

$$[\vec{L}^2, L_i] = [L_j^2, L_i] = L_j[L_j, L_i] + [L_j, L_i]L_j \overset{i)}{=} \mathrm{i}\hbar\epsilon_{jik}\,(L_jL_k + L_kL_j) = 0\,, \tag{L.3}$$

weil ϵ antisymmetrisch und $L_jL_k + L_kL_j$ symmetrisch ist unter der Vertauschung $j \leftrightarrow k$.

iii)

$$[L_i, x_j] = \epsilon_{imn}[x_mp_n, x_j] = -\mathrm{i}\hbar\epsilon_{imn}\delta_{jn}x_m = \mathrm{i}\hbar\epsilon_{ijm}x_m\,. \tag{L.4}$$

iv)

$$[L_i, \vec{x}^{\,2}] = x_j[L_i, x_j] + [L_i, x_j]x_j \overset{iii)}{=} 2\mathrm{i}\hbar\epsilon_{ijm}x_jx_m = 0\,, \tag{L.5}$$

weil ϵ antisymmetrisch und x_jx_m symmetrisch ist unter der Vertauschung $j \leftrightarrow m$.

v)

$$[L_i, p_j] = \epsilon_{imn}[x_mp_n, p_j] = \mathrm{i}\hbar\epsilon_{imn}\delta_{jm}p_n = \mathrm{i}\hbar\epsilon_{ijn}p_n\,. \tag{L.6}$$

vi)

$$[L_i, \vec{p}^{\,2}] = p_j[L_i, p_j] + [L_i, p_j]p_j \overset{v)}{=} 2\mathrm{i}\hbar\epsilon_{ijn}p_jp_n = 0\,, \tag{L.7}$$

weil ϵ antisymmetrisch und p_jp_n symmetrisch ist unter der Vertauschung $j \leftrightarrow n$.

c) Zunächst berechnen wir

$$[\vec{L}^2, x_j] = L_i[L_i, x_j] + [L_i, x_j]L_i \overset{iii)}{=} \mathrm{i}\hbar\epsilon_{ijk}\,(L_ix_k + x_kL_i)\ . \tag{L.8}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
[\vec{L}^2, [\vec{L}^2, x_j]] &= \mathrm{i}\hbar\epsilon_{ijk}\left(x_k[\vec{L}^2, L_i] + [\vec{L}^2, L_i]x_k + L_i[\vec{L}^2, x_k] + [\vec{L}^2, x_k]L_i\right) \\
&\overset{ii)}{=} -\hbar^2\,(\delta_{in}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jn})\,(L_iL_mx_n + L_ix_nL_m + L_mx_nL_i + x_nL_mL_i) \\
&= -\hbar^2\,(L_iL_jx_i - L_iL_ix_j + L_ix_iL_j - L_ix_jL_i \\
&\qquad +L_jx_iL_i - L_ix_jL_i + x_iL_jL_i - x_jL_iL_i) \\
&= -\hbar^2\,(L_iL_jx_i - L_iL_ix_j - L_ix_jL_i - L_ix_jL_i + x_iL_jL_i - x_jL_iL_i) \\
&= -\hbar^2\,(L_ix_iL_j + \mathrm{i}\hbar\epsilon_{jim}L_ix_m - L_iL_ix_j - L_iL_ix_j + \mathrm{i}\hbar\epsilon_{ijm}L_ix_m \\
&\qquad -x_jL_iL_i - \mathrm{i}\hbar\epsilon_{ijm}x_mL_i + L_jx_iL_i - \mathrm{i}\hbar\epsilon_{jim}x_mL_i - x_jL_iL_i) \\
&= 2\hbar^2\left(\vec{L}^2x_j + x_j\vec{L}^2\right)\,,
\end{aligned} \tag{L.9}$$

wobei im letzten Schritt $\vec{L}\cdot\vec{x} = \vec{x}\cdot\vec{L} = 0$ verwendet wurde.

Übung 2. *[Darstellung der $SO(3)$]*

a) Zeige, dass die 3×3 Matrizen M_j ($j = 1, 2, 3$), die durch

$$(M_j)_{kl} = -\mathrm{i}\,\epsilon_{jkl}\,, \quad (j, k, l = 1, 2, 3)\ , \tag{2}$$

definiert sind, den $SO(3)$-Vertauschungsregeln

$$[M_j, M_k] = \mathrm{i}\,\epsilon_{jkl}M_l \tag{3}$$

genügen.

b) Berechne den Casimir-Operator $M^2 = \sum_j M_j^2$. Welche Drehimpulsquantenzahl l haben die M_j demzufolge?

c) Welche Eigenwerte m sollte M_3 nach b) besitzen? Diagonalisiere M_3 und bestimme die Eigenwerte und die dazugehörigen Eigenvektoren.

Die Eigenvektoren von M_3 sind jeweils nur bis auf einen Phasenfaktor bestimmt. Ihre relativen Phasen lassen sich wie folgt festlegen:

d) Bestimme die Matrizen $M_\pm = M_1 \pm \mathrm{i}\, M_2$ und damit den Vektor $\vec{a}_1$, für den gilt:

$$M_+ \vec{a}_1 = 0\,. \tag{4}$$

Zeige, dass $\vec{a}_1$ Eigenvektor zu M_3 mit Eigenwert $m = 1$ ist.

e) Bestimme nun die beiden anderen Eigenvektoren $\vec{a}_0$ und $\vec{a}_{-1}$ von M_3 (zu den Eigenwerten $m = 0$ und $m = -1$) durch Anwendung von M_-. Damit sind die relativen Phasen der $\vec{a}_m$ festgelegt. Die verbleibende unbestimmte Phase kann man so festlegen, dass $\vec{a}_0$ nur positive, reelle Komponenten besitzt. Gib mit dieser Konvention die $\vec{a}_m$ an.

Lösung. Allgemein gilt $\epsilon_{abc}\epsilon_{aef} = \delta_{be}\delta_{cf} - \delta_{bf}\delta_{ce}$.

a)

$$\begin{aligned}
[M_j, M_k]_{ab} &= (M_j)_{ai}(M_k)_{ib} - (M_k)_{ai}(M_j)_{ib} \\
&= -\epsilon_{jai}\epsilon_{kib} + \epsilon_{kai}\epsilon_{jib} \\
&= \delta_{jk}\delta_{ab} - \delta_{jb}\delta_{ka} - \delta_{jk}\delta_{ab} + \delta_{kb}\delta_{ja} \\
&= \epsilon_{jkl}\epsilon_{lab} \\
&= \mathrm{i}\epsilon_{jkl}(M_l)_{ab}\,.
\end{aligned} \tag{L.10}$$

b) Wir halten j fest und summieren über i:

$$(M_j^2)_{ab} = -\epsilon_{jai}\epsilon_{jib} = \delta_{ab} - \delta_{ja}\delta_{jb}\,. \tag{L.11}$$

Daraus folgt

$$\left(\sum_j M_j^2\right)_{ab} = 3\delta_{ab} - \sum_j \delta_{ja}\delta_{jb} = 2\delta_{ab} \tag{L.12}$$

und wegen $M^2 = l(l+1)\mathbb{1}$ erhalten wir

$$l(l+1) = 2 \Rightarrow l = 1\,. \tag{L.13}$$

c) Aus $l = 1$ folgt $m = 1, 0, -1$. Das steht im Einklang mit den Eigenwerten $1, 0, -1$ von

$$M_3 = -\mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{L.14}$$

Die normierten Eigenvektoren lauten $\vec{v}_0 = (0,0,1)^T$, $\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\mathrm{i},1,0)^T$, $\vec{v}_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{i},1,0)^T$.

d) Es ergibt sich

$$M_\pm = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mp 1 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ \pm 1 & \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \tag{L.15}$$

und somit

$$\vec{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix} . \tag{L.16}$$

$\vec{a}_1$ ist linear abhängig von $\vec{v}_1$ und damit Eigenvektor zu M_3 mit Eigenwert $m = 1$.

e) Mit $\vec{a}_{m-1} = 1/c_m \, M_- \vec{a}_m$ und $c_m = \sqrt{l(l+1) - m(m-1)}$ ergibt sich

$$\vec{a}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} , \quad \vec{a}_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ \mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix} . \tag{L.17}$$

Berücksichtigt man die Konvention, müssen alle Eigenvektoren mit (-1) multipliziert werden:

$$\vec{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ -\mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \vec{a}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad \vec{a}_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix} . \tag{L.18}$$

Übung 3. *[Erwartungswerte der Drehimpulsoperatoren]*

Ein System befinde sich im Zustand $\psi = \Phi_{lm}$, ein Eigenzustand der Drehimpulsoperatoren M^2 und M_z. Berechne $\langle M_x \rangle$, $\langle M_x^2 \rangle$, $\langle M_y \rangle$ und $\langle M_y^2 \rangle$.

Lösung. Wir wissen, dass

$$M_x = \frac{1}{2} \left(M_+ + M_- \right) , \tag{L.19}$$

$$M_\pm \Phi_{lm} = c_\pm \Phi_{l,m\pm 1} , \tag{L.20}$$

$$M_+ M_- + M_- M_+ = 2 \left(M^2 - M_z^2 \right) . \tag{L.21}$$

mit den Auf- und Absteigeoperatoren M_+ und M_-, wobei die Werte der Konstanten c_+ und c_- irrelevant sind.
Formal ist die Lösung gegeben durch

$$\langle M_x \rangle = \int \Phi_{lm}^* M_x \Phi_{lm} d\tau = \frac{1}{2} \int \Phi_{lm}^* \left(M_+ + M_- \right) \Phi_{lm} d\tau \tag{L.22}$$

Nun ist $M_\pm \Phi_{lm} = c_\pm \Phi_{l,m\pm 1}$ und $\int \Phi_{lm}^* \Phi_{l,m\pm 1} d\tau = 0$, da Φ_{lm} und $\Phi_{l,m\pm 1}$ orthogonal zueinander sind. Also gilt

$$\int \Phi_{lm}^* M_\pm \Phi_{lm} d\tau = 0 , \tag{L.23}$$

sodass

$$\langle M_x \rangle = 0 . \tag{L.24}$$

Der Erwartungswert von M_x^2 ist gegeben durch

$$\left\langle M_x^2 \right\rangle = \int \Phi_{lm}^* M_x^2 \Phi_{lm} d\tau , \tag{L.25}$$

wobei

$$M_x^2 = \frac{1}{4}(M_+ + M_-)^2 = \frac{1}{4}\left(M_+M_- + M_-M_+ + M_+^2 + M_-^2\right) . \tag{L.26}$$

Ähnlich wie vorher gilt $\int \Phi_{lm}^* M_\pm^2 \Phi_{lm} d\tau \propto \int \Phi_{lm}^* \Phi_{l,m\pm2} = 0$, sodass die letzten beiden Terme nicht beitragen. Übrig bleibt also

$$\begin{aligned}\left\langle M_x^2 \right\rangle &= \frac{1}{4}\int \Phi_{lm}^* \left(M_+M_- + M_-M_+\right)\Phi_{lm} d\tau \\ &= \frac{1}{2}\int \Phi_{lm}^* \left(M^2 - M_z^2\right)\Phi_{lm} d\tau \\ &= \frac{1}{2}\left(l(l+1) - m^2\right) .\end{aligned} \tag{L.27}$$

M_y kann geschrieben werden als $M_y = \frac{i}{2}(M_- - M_+)$. Analoge Vorgehensweise liefert

$$\langle M_y \rangle = \langle M_x \rangle = 0\,, \tag{L.28}$$

$$\left\langle M_y^2 \right\rangle = \left\langle M_x^2 \right\rangle = \frac{1}{2}\left(l(l+1) - m^2\right) . \tag{L.29}$$

Übung 4. *[Drehimpuls eines Teilchens]*

Betrachte ein spinloses Teilchen, das durch die Wellenfunktion

$$\Psi = K\,(x + y + 2z)e^{-\alpha r}, \quad \textit{mit } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad K,\, \alpha \in \mathbb{R} \tag{5}$$

gegeben ist.

a) Berechne den Gesamtdrehimpuls des Teilchens.

b) Berechne den Erwartungswert des Drehimpulses in z-Richtung.

c) Was ist die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung des Drehimpulses in z-Richtung $L_z = +\hbar$ zu erhalten?

d) Was ist die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen im Raumwinkel $d\Omega$ mit den Koordinaten θ, ϕ zu finden?

Hinweis: Drücke Ψ durch Kugelflächenfunktionen aus.

Lösung. In Kugelkoordinaten lässt sich die Wellenfunktion schreiben als

$$\Psi = K\,r\,(\cos\phi\,\sin\theta + \sin\phi\,\sin\theta + 2\cos\theta)e^{-\alpha r}. \tag{L.30}$$

Die Winkelabhängigkeit der Wellenfuntion ist gegeben durch

$$\Psi(\theta,\,\phi) = K'\,(\cos\phi\,\sin\theta + \sin\phi\,\sin\theta + 2\cos\theta), \tag{L.31}$$

wobei die Normierungskonstante K' durch die Bedingung

$$\int_{-1}^{1} d\cos\theta \int_0^{2\pi} d\phi\,|\Psi(\theta,\,\phi)|^2 = 1 \tag{L.32}$$

gegeben ist. Mit

$$\cos\phi = \frac{1}{2}(e^{i\phi} + e^{-i\phi}), \quad \sin\phi = \frac{1}{2i}(e^{i\phi} - e^{-i\phi}) \tag{L.33}$$

erhalten wir

$$\Psi(\theta\,,\phi) = K'\left[\frac{1}{2}(e^{i\phi}+e^{-i\phi})\sin\theta + \frac{1}{2i}(e^{i\phi}-e^{-i\phi})\sin\theta + 2\cos\theta\right] \tag{L.34}$$

$$= K'\left[-\frac{1}{2}(1-i)\sqrt{\frac{8\pi}{3}}Y_1^1 + \frac{1}{2}(1+i)\sqrt{\frac{8\pi}{3}}Y_1^{-1} + 2\sqrt{\frac{4\pi}{3}}Y_1^0\right]. \tag{L.35}$$

Aus der Normierungsbedingung folgt

$$K'^2\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{8\pi}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{8\pi}{3} + 4\cdot\frac{4\pi}{3}\right] = 1 \quad \rightarrow \quad K' = \frac{1}{\sqrt{8\pi}}. \tag{L.36}$$

und damit

$$\Psi(\theta,\,\phi) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}}\left[-\frac{1}{2}(1-i)\sqrt{\frac{8\pi}{3}}Y_1^1 + \frac{1}{2}(1+i)\sqrt{\frac{8\pi}{3}}Y_1^{-1} + 2\sqrt{\frac{4\pi}{3}}Y_1^0\right]. \tag{L.37}$$

a) Da die Wellenfunktion durch Kugelflächenfunktionen mit $l = 1$ gegeben ist, erhalten wir

$$\sqrt{\langle \mathbf{L}^2\rangle} = \sqrt{l(l+1)}\hbar = \sqrt{2}\hbar \tag{L.38}$$

b) Für den Erwartungswert von L_z erhalten wir

$$\langle\Psi|L_z|\Psi\rangle = \frac{1}{8\pi}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{8\pi}{3}\cdot\hbar(Y_1^1)^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{8\pi}{3}\cdot(-\hbar)(Y_1^{-1})^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{8\pi}{3}\cdot 0\cdot(Y_1^0)^2\right] \tag{L.39}$$

$$= \frac{1}{8\pi}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{8\pi}{3}(+\hbar) + \frac{1}{2}\cdot\frac{8\pi}{3}(-\hbar)\right] = 0. \tag{L.40}$$

c) Die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung $L_z = +\hbar$ zu erhalten ist

$$P = |\langle L_z = +\hbar\,|\,\Psi(\theta,\,\phi)\rangle|^2 \tag{L.41}$$

$$= \frac{1}{8\pi}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{8\pi}{3} = \frac{1}{6}. \tag{L.42}$$

c) Die Wahrscheinlichkeit das Teilchen im Raumwinkel $d\Omega$ bei θ, ϕ zu finden ist

$$\int \Psi^*(\theta,\,\phi)\,\Psi(\theta,\,\phi)\,d\Omega = \frac{1}{8\pi}\left[\sin\theta(\sin\phi+\cos\phi)+2\cos\theta\right]^2\,d\Omega \tag{L.43}$$