Übung 1. *[CHSH-Ungleichung]*

In dieser Aufgabe betrachten wir eine verallgemeinerte Formulierung der Bell'schen Ungleichung mit vier Messungen, die aus einem Werk von Clauser, Horne, Shimony und Holt stammt[1] *und in der Quanteninformationstheorie weit verbreitet ist. Wir betrachten zwei Beobachter (Alice und Bob), die jeweils eine von zwei möglichen Messungen durchführen können. Diese Messungen definieren vier Observablen: a_0, a_1 für Alice und b_0, b_1 für Bob. Wir betrachten nun die folgende Grösse*

$$C \equiv (a_0 + a_1)b_0 + (a_0 - a_1)b_1. \tag{1}$$

Wir werden zeigen, dass die Werte, die C in der Quantenmechanik annehmen kann, mit den Resultaten der Messungen in einer lokalen Theorie mit verborgenen Variablen unverträglich sind.

(a) *Wir nehmen an, dass die Messergebnisse nur die Werte ± 1 annehmen können. Dies trifft z.B. für eine mit $\hbar/2$ skalierte Spin-Messung in Richtung von $\vec{n}$ ($|\vec{n}| = 1$) eines Spin $1/2$-Teilchens zu. Zeige, dass $C = \pm 2$.*

(b) *Wir nehmen nun an, dass die Werte der Observablen nicht direkt im Modell enthalten sind, sondern noch eine verborgene Variable λ benötigen, um exakt berechnet zu werden. Die Variable λ kann durch eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $P_{HV}(\lambda)$ beschrieben werden. Berechne den Erwartungswert von C unter solchen Bedingungen und leite die CHSH-Ungleichung her:*

$$|\langle C\rangle| = |\langle a_0 b_0\rangle + \langle a_1 b_0\rangle + \langle a_0 b_1\rangle - \langle a_1 b_2\rangle| \leq 2 \tag{2}$$

Wir wollen nun zeigen, dass die CHSH-Ungleichung in der quantenmechanischen Beschreibung des EPR Versuches nicht erfüllt ist. Wir betrachten dazu den Singulett-Zustand

$$|\Psi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle_{AB} - |\downarrow\uparrow\rangle_{AB}\right) \tag{3}$$

und schreiben die Observablen als Bloch-Vektoren $\hat{a}_i$, $\hat{b}_i$, mit $a_i = \vec{\sigma}\cdot\hat{a}_i$ und $b_i = \vec{\sigma}\cdot\hat{b}_i$, wobei $\vec{\sigma} = \hat{e}_x\sigma_x + \hat{e}_y\sigma_y + \hat{e}_z\sigma_z$.

(c) *Zeige, dass die Regeln der Quantenmechanik für diese Observablen*

$$\langle\Psi|(\vec{\sigma}_A\cdot\hat{a})(\vec{\sigma}_B\cdot\hat{b})|\Psi\rangle_{AB} = -\hat{a}\cdot\hat{b} \tag{4}$$

besagen.

(c) *Wir wählen nun für die Observablen zwei Sätze von orthogonalen Richtungen, z.B. $\hat{a}_0 = \hat{e}_x$, $\hat{a}_1 = \hat{e}_y$ und z.B. $\hat{b}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{e}_x + \hat{e}_y)$, $\hat{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{e}_x - \hat{e}_y)$. Zeige, dass der Erwartungswert von C für solche Observablen die CHSH-Ungleichung verletzt. Was kann man aus dieser Verletzung folgern?*

Lösung.

(a) Wir betrachten die möglichen Werte der Summanden $a_0 + a_1$ und $a_0 - a_1$, wenn $a_0 = a_1 = \pm 1$. Es gilt $a_0 + a_1 = \pm 2$, $a_0 - a_1 = 0$ falls $a_0 = a_1$ und $a_0 + a_1 = 0$, $a_0 - a_1 = \pm 2$ falls $a_0 \neq a_1$. Somit ist für alle Kombinationen von a_0, a_1 jeweils nur ein Summand ungleich Null und gleich ± 2. Multiplikation mit $b_0 = \pm 1$ oder $b_1 = \pm 1$ ändert nur das Vorzeichen.

[1] John F. Clauser, Michael A. Horne, Abner Shimony, and Richard A. Holt, Phys. Rev. Lett. 23, 880.

(b) Die Wahrscheinlichkeit, dass die Observablen die Werte $a_0 = \alpha_0$, $a_1 = \alpha_1$, $b_0 = \beta_0$ und $b_1 = \beta_1$ annehmen, ist gerade durch $P(a_0 = \alpha_0, a_1 = \alpha_1, b_0 = \beta_0, b_1 = \beta_1|\lambda)P_{HV}(\lambda)$ gegeben. Wenn wir mit dieser Wahrscheinlichkeit den Erwartungswert von C bilden, werden wir über alle λ mitteln müssen und das führt zu

$$|\langle C\rangle| = |\langle a_0 b_0\rangle + \langle a_1 b_0\rangle + \langle a_0 b_1\rangle - \langle a_1 b_1\rangle| \leq 2,$$

da der Erwartungswert kleiner als der maximale Wert der Wahrscheinlichkeitsverteilung sein muss.

(c) Der Singlet-Zustand ist rotationsinvariant, *d.h.* $(U_A \otimes U_B)\,|\Psi\rangle_{AB} = |\Psi\rangle_{AB}$ für alle unitäre U mit $\det U = 1$. Da die Pauli-Matrizen antiunitär sind, folgt

$$\begin{aligned}
\langle\Psi|\,(\vec{\sigma}_A \cdot \hat{a})\left(\vec{\sigma}_B \cdot \hat{b}\right)|\Psi\rangle_{AB} &= \langle\Psi|\sum_{jk} a_j b_k (\sigma_j \otimes \sigma_k)|\Psi\rangle_{AB} && \text{(L.1)}\\
&= -\langle\Psi|\sum_{jk} a_j b_k \left(\mathbb{1}_A \otimes \sigma_k\sigma_j\right)|\Psi\rangle_{AB} && \text{(L.2)}\\
&= -\langle\Psi|\sum_{jk} a_j b_k \left(\mathbb{1}_A \otimes (\delta_{kj}\mathbb{1}_B + i\epsilon_{kjl}\sigma_l)\right)|\Psi\rangle_{AB} && \text{(L.3)}\\
&= -\langle\Psi|\sum_{j} a_j b_j|\Psi\rangle_{AB} - \langle\Psi|\sum_{jk}\left(\mathbb{1}_A \otimes i\epsilon_{kjl}\sigma_l\right)|\Psi\rangle_{AB} && \text{(L.4)}\\
&= -\hat{a}\cdot\hat{b}. && \text{(L.5)}
\end{aligned}$$

Im zweiten Schritt haben wir das System mit σ_j rotiert (oder anders gesehen σ_j^2 nach σ_k eingeführt und $\sigma_j \otimes \sigma_j|\Psi\rangle = -|\Psi\rangle$ mit $\det(\sigma_j) = -1$ benutzt). Ausserdem haben wir $\sigma_k\sigma_j = \delta_{kj}\mathbb{1}_B + i\epsilon_{kjl}\sigma_l$ benutzt.

(d) Wir wählen $\hat{a}_0 = \hat{e}_x$, $\hat{a}_1 = \hat{e}_y$ und $\hat{b}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{e}_x + \hat{e}_y)$, $\hat{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{e}_x - \hat{e}_y)$ (zwei Sätze von orthogonalen Polarisationsrichtungen im ursprüglichen Argument von Bell mit verschränkten Photonen, horizontal/vertikal und +45°/-45°). Mit diesen Richtungsvektoren bekommen wir für die Erwartungswerte im Zustand $|\Psi\rangle$:

$$\langle a_0 b_0\rangle = \langle a_1 b_0\rangle = \langle a_0 b_1\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \langle a_1 b_1\rangle = +\frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{L.6}$$

Dann folgt unmittelbar $|\langle C\rangle| = 2\sqrt{2} \nleq 2$. Die Quantenmechanik verletzt die CHSH-Ungleichung und kann dementsprechend keine lokale Theorie der Realität mit verborgenen Variablen sein.

Übung 2. *[Verkettete Bell'sche Ungleichungen]*

In dieser Aufgabe werden wir eine Form der Bell'schen Ungleichung kennen lernen, deren Verletzung durch die Quantenmechanik (QM) noch stärker ist, als die Verletzung der in der Vorlesung besprochenen Version. Wir bezeichnen mit X das Resultat der Messung des ersten Spins und mit Y das Resultat einer raum-zeitlich getrennten Messung des zweiten Spins eines Singulett-Zustandes

$$|\psi^-\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}(|\vec{e}_1\rangle_A \otimes |\vec{e}_2\rangle_B - |\vec{e}_2\rangle_A \otimes |\vec{e}_1\rangle_B)\,.$$

Die Messung findet jeweils bezüglich einer um einen Winkel α rotierten Basis $|\alpha\rangle := \cos(\alpha)|\vec{e}_1\rangle + \sin(\alpha)|\vec{e}_2\rangle$, $|\alpha^\perp\rangle := -\sin(\alpha)|\vec{e}_1\rangle + \cos(\alpha)|\vec{e}_2\rangle$ statt. Der Index in X_α gibt diesen Winkel an.

(a) *Betrachte die "Bell-Quantity" I_N für $i \in \{0, 2, \dots, 2N-2\}$ und $j \in \{1, 3, \dots, 2N-1\}$,*

$$I_N := P\Big[X_0 \neq Y_{\frac{2N-1}{2N}\frac{\pi}{2}}\Big] + \sum_{|i-j|=1} P\Big[X_{\frac{i}{2N}\frac{\pi}{2}} = Y_{\frac{j}{2N}\frac{\pi}{2}}\Big]. \tag{5}$$

$P\,[X_\alpha = Y_\beta]$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Observablen X_α und Y_β den gleichen Wert annehmen. Analog wird die Wahrscheinlichkeit für unterschiedliche Messresultate definiert.

Wir gehen zunächst von der Existenz verborgener Variablen aus. Dazu wollen wir annehmen, dass jede Messung von X, Y die Realisierung zweier unabhängiger Zufallsvariablen ist, die ausschliesslich Werte ± 1 annehmen können. Zeige, dass dann $I_N \geq 1$ gilt.

Hinweis. Betrachte

$$F_N := 1 - \delta_{X_0 Y_{\frac{2N-1}{2N}\frac{\pi}{2}}} + \sum_{|i-j|=1} \delta_{X_{\frac{i}{2N}\frac{\pi}{2}} Y_{\frac{j}{2N}\frac{\pi}{2}}}, \tag{6}$$

wobei $\delta_{X_\alpha Y_\beta}$ das Kronecker-Delta der Resultate der Messung X_α und Y_β ist. Zeige, dass für jede mögliche Realisierung der verschiedenen Zufallsvariablen $F_N \geq 1$ gilt, und folgere daraus die Behauptung.

(b) *Bevor wir I_N quantenmechanisch berechnen können, benötigen wir zuerst die Wahrscheinlichkeit für eine Messung in der rotierten Basis. Dazu definieren wir noch die Projektionsoperatoren $O^\alpha_{A,B} := |\alpha\rangle\langle\alpha| - |\alpha^\perp\rangle\langle\alpha^\perp|$. Zeige nun, dass im Zustand $|\psi^-\rangle$ der Operator $O^\alpha_A \otimes O^\beta_B$ den Wert -1 mit folgender Warscheinlichkeit annimmt:*

$$Pr[O^\alpha_A \otimes O^\beta_B = -1]_{|\psi^-\rangle} = \cos^2(\alpha - \beta)\,.$$

(c) *Berechne nun I_N nach den Gesetzen der Quantenmechanik. Wie verhält sich I_N für $N \to \infty$? Verwende dazu das Resultat aus Teilaufgabe (b).*

(d) *Betrachte den Fall $N = 2$ und verifiziere die Verletzung von $I_2 \leq 1$ durch die Quantenmechanik. Vergleiche das Resultat mit der relativen Abweichung des quantenmechanischen Erwartungswerts von der Schwelle der üblichen (Bell'schen) CHSH-Ungleichung.*

(e) *Bei der Behandlung der Bell'schen Ungleichung im Skript werden Messungen bezüglich gedrehter Raumachsen $\vec{n}$ betrachtet, während wir bisher von abstrakten Rotationen im Hilbertraum $\mathbb{C}^2$ ausgegangen sind. Wie muss man $\vec{n}$ im Experiment wählen, wenn man einen Spin bezüglich einer im Hilbertraum um den Winkel α gedrehten Basis messen möchte?*

Lösung.

(a) Wir betrachten mögliche Kombinationen der $2N$ Messwerte für die verschiedenen Messrichtungen und versuchen diese so zu wählen, dass $F_N < 1$. Wir sehen, dass die Summe in (6) in diesem Fall den Wert 0 annehmen muss, und somit auch jedes einzelne Delta in der Summe verschwindet. Wir wählen für X_0 den Wert $+1$ schliessen aus der Betrachtung der folgenden Tabelle, dass dann $Y_{\frac{2N-1}{2N}\frac{\pi}{2}} = -1$ gelten muss.

X_α	α	β	Y_β
$+1$	0		
		$\frac{1}{2N}\frac{\pi}{2}$	-1
$+1$	$\frac{2}{2N}\frac{\pi}{2}$		
		$\frac{3}{2N}\frac{\pi}{2}$	-1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$+1$	$\frac{2N-2}{2N}\frac{\pi}{2}$		
		$\frac{2N-1}{2N}\frac{\pi}{2}$	-1

Somit verschwindet aber auch das erste Delta in (6) und wir haben $F_N = 1$. Analog können wir auch argumentieren, falls X_0 den Wert -1 annimmt. Somit ist die im Hinweis aufgestellte Behauptung bewiesen. Da es sich bei I_N um den Erwartungswert von F_N handelt, folgt daraus $I_N \geq 1$.

(b) Wähle $|\vec{e}_1\rangle_{A,B} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $|\vec{e}_2\rangle_{A,B} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Dann ist $|\psi^-\rangle$ gegeben durch

$$
\begin{aligned}
|\psi^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\vec{e}_1\rangle_A \otimes |\vec{e}_2\rangle_B - |\vec{e}_2\rangle_A \otimes |\vec{e}_1\rangle_B) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix} ,
\end{aligned}
$$

die gedrehte Basis durch

$$
|\alpha\rangle = \begin{pmatrix}\cos(\alpha)\\ \sin(\alpha)\end{pmatrix}, \qquad |\alpha^\perp\rangle = \begin{pmatrix}-\sin(\alpha)\\ \cos(\alpha)\end{pmatrix},
$$

und der Operator $O_A^\alpha \otimes O_B^\beta$ durch

$$
\begin{aligned}
O_A^\alpha \otimes O_B^\beta &= (|\alpha\rangle\langle\alpha| - |\alpha^\perp\rangle\langle\alpha^\perp|) \otimes (|\beta\rangle\langle\beta| - |\beta^\perp\rangle\langle\beta^\perp|) \\
&= |\alpha\rangle\langle\alpha| \otimes |\beta\rangle\langle\beta| - |\alpha^\perp\rangle\langle\alpha^\perp| \otimes |\beta\rangle\langle\beta| - |\alpha\rangle\langle\alpha| \otimes |\beta^\perp\rangle\langle\beta^\perp| + |\alpha^\perp\rangle\langle\alpha^\perp| \otimes |\beta^\perp\rangle\langle\beta^\perp| \\
&=: (+1)P_1 + (-1)P_{-1}\,.
\end{aligned}
$$

Es ist äquivalent, den Operator $O_A^{\alpha-\beta} \otimes O_B^0$ anstatt $O_A^\alpha \otimes O_B^\beta$ zu betrachten. Der entsprechende Projektor P_{-1}, dessen Warscheinlichkeit wir berechnen möchten, ist also

$$
\begin{aligned}
P_{-1} &= |(\alpha-\beta)^\perp\rangle\langle(\alpha-\beta)^\perp| \otimes |0\rangle\langle 0| + |\alpha-\beta\rangle\langle\alpha-\beta| \otimes |\, 0^\perp\rangle\langle 0^\perp| \\
&= \begin{pmatrix} -\sin(\alpha-\beta) \\ \cos(\alpha-\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin(\alpha-\beta) & \cos(\alpha-\beta) \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad + \begin{pmatrix} \cos(\alpha-\beta) \\ \sin(\alpha-\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha-\beta) & \sin(\alpha-\beta) \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sin^2(\alpha-\beta) & 0 & -\cos(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\cos(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\beta) & 0 & \cos^2(\alpha-\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2(\alpha-\beta) & 0 & \cos(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\beta) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\beta) & 0 & \sin^2(\alpha-\beta) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

und somit folgt

$$
\begin{aligned}
Pr[O_A^\alpha \otimes O_B^\beta = -1]_{|\psi^-\rangle} = \langle \psi^- \mid P_{-1} \mid \psi^- \rangle &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} P_{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} [\begin{pmatrix} \cos(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\beta) \\ 0 \\ -\cos^2(\alpha-\beta) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \cos^2(\alpha-\beta) \\ 0 \\ \cos(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\beta) \end{pmatrix}] \\
&= \cos^2(\alpha-\beta)\,.
\end{aligned}
$$

(c) Aus der Lösung von Teilaufgabe (b) entnehmen wir $P[X_\alpha \neq Y_\beta] = \cos^2(\alpha-\beta)$. Daraus folgt

$$P[X_\alpha = Y_\beta] = 1 - \cos^2(\alpha-\beta) = \sin^2(\alpha-\beta).$$

Somit haben wir

$$I_N = \cos^2\left(\frac{2N-1}{2N}\frac{\pi}{2}\right) + (2N-1)\sin^2\left(\frac{1}{2N}\frac{\pi}{2}\right) = 2N\sin^2\left(\frac{1}{2N}\frac{\pi}{2}\right)$$

und $\lim_{N\to\infty} I_N = 0$.

(d) Wir setzen $N = 2$ und erhalten aus b)

$$I_2 = 4\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2 - \sqrt{2} < 1.$$

Für die relative Abweichung der Verletzung der verketteten Bell'schen Ungleichung haben wir $\Delta_{CBI} \equiv \frac{1-I_2}{1} = \sqrt{2} - 1$. Wir vergleichen diese relative Abweichung mit dem Resultat aus der CHSH-Formulierung, wo die relative Abweichung der Verletzung ist $\Delta_{CHSH} = \frac{2\sqrt{2}-2}{2} = \sqrt{2} - 1$ (siehe Aufgabe 1). Das heisst, dass die relative Abweichung des QM-Erwartungswerts vom durch die verkettete Bell'sche Ungleichung gegebenen Grenzwert gerade gleich gross ist, wie bei der üblichen CHSH-Formulierung.

(e) Wir betrachten den in Teilaufgabe (b) definierten Operator O^α zur Messung des Spin bezüglich der Basis $(|\alpha\rangle, |\alpha^\perp\rangle)$, wobei $|\alpha\rangle = \cos(\alpha)|\vec{e}_1\rangle + \sin(\alpha)|\vec{e}_2\rangle$ und $|\alpha^\perp\rangle = -\sin(\alpha)|\vec{e}_1\rangle + \cos(\alpha)|\vec{e}_2\rangle$.

$$\begin{aligned}
O^\alpha &= |\alpha\rangle\langle\alpha| - |\alpha^\perp\rangle\langle\alpha^\perp| \\
&= \cos^2(\alpha)|\vec{e}_1\rangle\langle\vec{e}_1| + \cos(\alpha)\sin(\alpha)\big(|\vec{e}_1\rangle\langle\vec{e}_2| + |\vec{e}_2\rangle\langle\vec{e}_1|\big) + \sin^2(\alpha)|\vec{e}_2\rangle\langle\vec{e}_2| \\
&\quad - \sin^2(\alpha)|\vec{e}_1\rangle\langle\vec{e}_1| + \cos(\alpha)\sin(\alpha)\big(|\vec{e}_1\rangle\langle\vec{e}_2| + |\vec{e}_2\rangle\langle\vec{e}_1|\big) - \cos^2(\alpha)|\vec{e}_2\rangle\langle\vec{e}_2| \\
&= \cos(2\alpha)\big(|\vec{e}_1\rangle\langle\vec{e}_1| - |\vec{e}_2\rangle\langle\vec{e}_2|\big) + \sin(2\alpha)\big(|\vec{e}_1\rangle\langle\vec{e}_2| + |\vec{e}_2\rangle\langle\vec{e}_1|\big).
\end{aligned}$$

In der Matrixschreibweise bezüglich der nicht rotierten Basis von $\mathbb{C}^2$ sieht man nun

$$O^\alpha = \begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(2\alpha) \\ 0 \\ \cos(2\alpha) \end{pmatrix} \cdot \vec{\sigma}.$$

Die Messung bezüglich einer um den Winkel α rotierten Basis entspricht also der Messung des Spin entlang einer um den Winkel 2α gedrehten Raumachse. Somit entspricht das Setup mit einem Raumwinkel von jeweils $\frac{\pi}{4}$ zwischen den Messachsen wieder Situation aus Teilaufgabe d), bei der die Spins bezüglich um den Winkel $\frac{\pi}{8}$ gedrehten Basen gemessen werden.