Übung 1. *[Eichinvarianz]*

Betrachte ein Teilchen mit Ladung e und Masse m im elektromagnetischen Feld, das durch das Vektorpotential $\mathbf{A}$ und das elektrische Potential Φ beschrieben wird. Die Schrödingergleichung in der Ortsdarstellung ist gegeben durch

$$i\hbar\partial_t\psi(\mathbf{x},t) = \left[\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - e\mathbf{A}(\mathbf{x},t)\right)^2 + e\Phi(\mathbf{x},t)\right]\psi(\mathbf{x},t).$$

Eichtransformationen wirken wie folgt auf das elektrische Potential Φ und das Vektorpotential $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} \to \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \nabla\chi\,, \quad \Phi \to \tilde{\Phi} = \Phi - \frac{\partial\chi}{\partial t}\,, \tag{1}$$

mit der skalaren Funktion $\chi(\mathbf{x},t)$. Die Schrödingergleichung bleibt dabei forminvariant.

a) *Zeige, dass die Eichtransformation*

$$\tilde{\psi}(\mathbf{x},t) = \exp\left(\frac{ie}{\hbar}\chi(\mathbf{x},t)\right)\psi(\mathbf{x},t)$$

die Schrödingergleichung invariant lässt.

Physikalische Observablen müssen eichinvariant sein und somit sind deren Matrixelemente invariant unter Eichtransformationen. Zur Vereinfachung beschränken wir uns hier auf statische Felder, so dass in (1) $\Phi \to \tilde{\Phi} = \Phi$ gilt. Für eine Observable $\mathcal{O}(\mathbf{p},\mathbf{A},\Phi)$ fordern wir nun:

$$\langle\psi|\mathcal{O}(\mathbf{p},\mathbf{A},\Phi)|\psi\rangle = \left\langle\tilde{\psi}\middle|\mathcal{O}(\mathbf{p},\tilde{\mathbf{A}},\tilde{\Phi})\middle|\tilde{\psi}\right\rangle\,. \tag{2}$$

Die linke Seite kann geschrieben werden als:

$$\langle\psi|\mathcal{O}(\mathbf{p},\mathbf{A},\Phi)|\psi\rangle = \left\langle\tilde{\psi}\middle|\tilde{\mathcal{O}}(\mathbf{p},\mathbf{A},\Phi)\middle|\tilde{\psi}\right\rangle\,,$$

wobei

$$\tilde{\mathcal{O}}(\mathbf{p},\mathbf{A},\Phi) = \exp\left(\frac{ie}{\hbar}\chi\right)\mathcal{O}(\mathbf{p},\mathbf{A},\Phi)\,\exp\left(-\frac{ie}{\hbar}\chi\right)$$

die unitäre Transformation ist, die $\mathcal{O}$ nach $\tilde{\mathcal{O}}$ abbildet. Die resultierende notwendige und hinreichende Bedingung,

$$\tilde{\mathcal{O}}(\mathbf{p},\mathbf{A},\Phi) = \mathcal{O}(\mathbf{p},\tilde{\mathbf{A}},\tilde{\Phi})$$

ist genau dann erfüllt, wenn

$$\mathcal{O}(\mathbf{p},\mathbf{A},\Phi) = \mathcal{O}(\mathbf{p} - e\mathbf{A},\Phi)\,. \tag{3}$$

b) *Leite unter der Annahme von (3) die Gleichung (2) her.*

c) *Ausgehend von der Annahme, dass der kanonische Impuls $\mathbf{p}$ eine Observable ist, was folgt aus einer analogen Herleitung zu Teil b)?*

Lösung.

a) Wir multiplizieren zunächst die Schrödingergleichung von links mit dem Faktor: $\exp\left[(ie/\hbar)\,\chi(\mathbf{x},t)\right]$. Die linke Seite formen wir mit Hilfe der folgenden Identität um:

$$\mathrm{e}^{f(y)}\frac{\partial}{\partial y} = \left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial f(y)}{\partial y}\right)\mathrm{e}^{f(y)}.$$

Wir erhalten also

$$\begin{aligned}\text{L.S.} &= \exp\left(\frac{ie}{\hbar}\chi(\mathbf{x},t)\right) i\hbar\frac{\partial\psi(\mathbf{x},t)}{\partial t}\\ &= i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{ie}{\hbar}\frac{\partial\chi(\mathbf{x},t)}{\partial t}\right)\exp\left(\frac{ie}{\hbar}\chi(\mathbf{x},t)\right)\psi(\mathbf{x},t)\,.\end{aligned}$$

Nach der linken Seite müssen wir nun den Phasenfaktor auch auf der rechten Seite am Differentialoperator vorbeiziehen:

$$\begin{aligned}\text{R.S.} &= \exp\left(\frac{ie}{\hbar}\chi(\mathbf{x},t)\right)\left[\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - e\mathbf{A}(\mathbf{x},t)\right)^2 + e\Phi(\mathbf{x},t)\right]\psi(\mathbf{x},t)\\ &= \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - e\mathbf{A}(\mathbf{x},t) - e\nabla\chi(\mathbf{x},t)\right)\exp\left(\frac{ie}{\hbar}\chi(\mathbf{x},t)\right)\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - e\mathbf{A}(\mathbf{x},t)\right)\psi(\mathbf{x},t)\\ &\quad + e\Phi(\mathbf{x},t)\exp\left(\frac{ie}{\hbar}\chi(\mathbf{x},t)\right)\psi(\mathbf{x},t)\\ &= \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - e\mathbf{A}(\mathbf{x},t) - e\nabla\chi(\mathbf{x},t)\right)^2\exp\left(\frac{ie}{\hbar}\chi(\mathbf{x},t)\right)\psi(\mathbf{x},t)\\ &\quad + e\Phi(\mathbf{x},t)\exp\left(\frac{ie}{\hbar}\chi(\mathbf{x},t)\right)\psi(\mathbf{x},t)\,.\end{aligned}$$

Zusammengesetzt ergibt dies die Behauptung:

$$\begin{aligned}i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\exp\left(\frac{ie}{\hbar}\chi(\mathbf{x},t)\right)\psi(\mathbf{x},t)}_{\tilde{\psi}(\mathbf{x},t)} &= \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - e\underbrace{\left(\mathbf{A}(\mathbf{x},t) + \nabla\chi(\mathbf{x},t)\right)}_{\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{x},t)}\right)^2\tilde{\psi}(\mathbf{x},t)\\ &\quad + e\underbrace{\left(\Phi(\mathbf{x},t) - \frac{\partial\chi(\mathbf{x},t)}{\partial t}\right)}_{\tilde{\Phi}(\mathbf{x},t)}\tilde{\psi}(\mathbf{x},t)\,.\end{aligned}$$

b) Es gilt dass

$$\left(\mathbf{p} - e\tilde{\mathbf{A}}\right)\tilde{\psi} = \mathrm{e}^{\frac{ie}{\hbar}\chi}\left(\mathbf{p} - e\mathbf{A}\right)\psi \quad \text{und} \quad \tilde{\Phi}\,\tilde{\psi} = \mathrm{e}^{\frac{ie}{\hbar}}\Phi\psi\,.$$

Damit ist

$$\mathcal{O}\left(\mathbf{p} - e\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\Phi}\right)\tilde{\psi} = \mathrm{e}^{\frac{ie}{\hbar}\chi}\mathcal{O}\left(\mathbf{p} - e\mathbf{A}, \Phi\right)\psi\,.$$

Multipliziert man nun beide Seiten von links mit $\left\langle\tilde{\psi}\right|$ folgt

$$\left\langle\tilde{\psi}\right|\mathcal{O}(\mathbf{p} - e\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\Phi})\left|\tilde{\psi}\right\rangle = \left\langle\tilde{\psi}\right|\mathrm{e}^{\frac{ie}{\hbar}\chi}\mathcal{O}\left(\mathbf{p} - e\mathbf{A}, \Phi\right)\left|\psi\right\rangle.$$

und daraus folgt Gleichung (2):

$$\langle\psi|\mathcal{O}(\mathbf{p} - e\mathbf{A}, \Phi)|\psi\rangle = \left\langle\tilde{\psi}\middle|\mathcal{O}(\mathbf{p} - e\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\Phi})\middle|\tilde{\psi}\right\rangle\ .$$

c) Wir betrachten den kanonischen Impuls als Observable. In diesem Fall haben wir also $\mathcal{O}(\mathbf{p}, \mathbf{A}, \Phi) = \mathbf{p}$. Wiederholt man die Schritte aus dem Aufgabenteil (b) findet man die Bedingung:

$$\mathbf{p}\,\tilde{\psi} = \mathrm{e}^{\frac{ie}{\hbar}\chi}\mathbf{p}\,\psi\,.$$

Diese Bedingung kann jedoch nicht erfüllt werden, da das Vorbeiziehen der Exponentialfunktion am Impulsoperator einen zusätzlichen Beitrag $(ie/\hbar)\nabla\chi$ erzeugt. Man muss also $\mathbf{p}$ durch $\mathbf{p} - e\mathbf{A}$ ersetzen, da sich der zusätzliche Beitrag mit dem Beitrag, der von der Transformation von $\mathbf{A}$ kommt, weghebt.

Übung 2. *[Stern-Gerlach Versuch]*

Ein Strahl von Atomen mit Spin-Quantenzahl $s = 1/2$, der keinen Bahndrehimpuls besitzt, passiert einen Stern-Gerlach Magnet, dessen Magnetfeld entlang einer Richtung D orientiert ist, die mit der z-Achse den Winkel θ bildet. Der auslaufende Teilstrahl, dessen Spins in Richtung von D ausgerichtet sind, passiere einen zweiten Stern-Gerlach Magnet, dessen Magnetfeld entlang der z-Achse orientiert ist.

Zeige, dass in den zwei Strahlen, die aus dem zweiten Magneten kommen, die Anzahl der Atome mit Spin parallel bzw. anti-parallel zur z-Achse im Verhältnis $\cot^2(\theta/2)$ vorliegen.

Lösung. Zunächst machen wir eine kleine Hilfsbemerkung:

Der Hamilton-Operator $S = \vec{n}\cdot\vec{\sigma}$ mit zugehörigem Vektor $\vec{n} = (\cos\phi\sin\theta,\, \sin\phi\sin\theta,\, \cos\theta)^T$ hat die Eigenwerte $\lambda_\pm = \pm 1$ mit entsprechenden Eigenvektoren

$$|\vec{n}+\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2}\,e^{-i\,\phi/2} \\ \sin\frac{\theta}{2}\,e^{i\,\phi/2} \end{pmatrix}, \quad |\vec{n}-\rangle = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2}\,e^{-i\,\phi/2} \\ \cos\frac{\theta}{2}\,e^{i\,\phi/2} \end{pmatrix}\,. \tag{L.1}$$

Die Teilchen, die den zweiten Stern-Gerlach-Aufbau erreichen, sind im Eigenzustand zum Eigenwert +1, d.h. $|\vec{n}+\rangle$ mit $\phi = 0$. Nach passieren des zweiten Aufbaus wird dieser Zustand in seine Komponenten entlang $|\hat{z}+\rangle$ und $|\hat{z}-\rangle$ aufgetrennt und wir finden somit

$$\frac{N_\uparrow}{N_\downarrow} = \frac{|\langle\hat{z}+|\vec{n}+\rangle|^2}{|\langle\hat{z}-|\vec{n}+\rangle|^2} = \frac{\cos^2(\theta/2)}{\sin^2(\theta/2)} = \cot^2(\theta/2)\,. \tag{L.2}$$

Übung 3. *[Clebsch-Gordan Koeffizienten]*

In dieser Aufgabe betrachten wir ein System, das sich aus zwei Spin-$1/2$-Teilchen zusammensetzt. Wir werden die Zerlegung des Systems in Unterräume berechnen, die bezüglich des Gesamtspindrehimpulses invariant sind. D.h. wir bestimmen die Clebsch-Gordan-Koeffizienten für $j_1 = \frac{1}{2}$ und $j_2 = \frac{1}{2}$ durch explizite Rechnung.

Um einheitliche Bezeichnungen zu haben, nennen wir die Eigenzustände zu J_1^2, J_{1z} bzw. J_2^2, J_{2z} jeweils $|j_1, m\rangle$ und $|j_2, m\rangle$ mit $m = \pm 1/2$. Wir suchen die Linearkombinationen der Produktzustände $\left|\frac{1}{2}, m\right\rangle\left|\frac{1}{2}, m'\right\rangle \equiv \left|\frac{1}{2}, m\right\rangle \otimes \left|\frac{1}{2}, m'\right\rangle$ (m, $m' = \pm 1/2$), die Eigenzustände zu $\vec{J}^2$ und J_z sind, wobei $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2 \equiv \vec{J}_1 \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \vec{J}_2$.

(a) Welches sind die Eigenzustände zu J_z und ihre Eigenwerte? Welche Eigenwerte sind entartet?

(b) Bestimme die Linearkombinationen der $|1/2, m\rangle\,|1/2, m'\rangle$, die Eigenzustände zu J^2 sind.
Hinweis: Zerlege die J^2 so, dass ausser bereits diagonalisierten Operatoren nur Auf- und Absteigeoperatoren vorkommen, siehe Vorlesung.

(c) Wie verhalten sich die gefundenen Linearkombinationen bei Vertauschen der Indizes $1 \leftrightarrow 2$? Finde eine Gemeinsamkeit innerhalb der gefundenen irreduziblen Darstellungen.

Lösung.

(a) Per Vorraussetzung haben wir die Eigenzustände zu

$$J_1 : \quad \left|\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle, \quad \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle \qquad \text{und} \qquad J_2 : \quad \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle, \quad \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle .$$

Bilden wir alle Produktzustände dieser Eigenzustände und wenden $L_z = L_{1z} + L_{2z}$ an (und bezeichnen dessen Eigenwerte mit m), so finden wir direkt:

Eigenwerte ($m \equiv m_1 + m_2$)	Eigenzustände	Entartung
1	$\|1\ 1\rangle$	1
0	$\|1\ 0\rangle$,$\|0\ 0\rangle$	2
-1	$\|1\ -1\rangle$	1

(b) Wir folgen zunächst dem Hinweis und schreiben den Gesamtspin-Operator als Kombination von Diagonal- und Auf- bzw. Absteige-Operatoren, *d.h.*

$$J^2 = (J_1 + J_2)^2 = J_1^2 + J_2^2 + 2J_{1z}J_{2z} + J_{1+}J_{2-} + J_{1-}J_{2+} \ .$$

Wer nehmen nun alle Eigenvektoren von J_z mit Eigenwert m und konstruieren damit Eigenbasen von J^2 *(Erinnerung:* $\left[J^2, J_z\right] = 0$*)*:

- Für $m = 1$ haben wir oben bereits gesehen, dass nur ein Eigenzustand existiert. Wir berechnen

$$J^2 \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle = \left(\frac{3}{2} + 2J_{1z}J_{2z} + J_{1+}J_{2-} + J_{1-}J_{2+}\right) \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle$$

und verwenden sowohl

$$J_{1z}J_{2z} \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle = \frac{1}{4} \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle$$

als auch

$$J_{1+}J_{2-} \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle = J_{1-}J_{2+} \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle = 0 \,,$$

wobei wir die Orthogonalität und die Algebra der Auf- und Absteigeoperatoren ausgenutzt haben. Somit finden wir direkt:

$$J^2 \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle = 2 \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle \ ,$$

Wodurch wir sofort $j = 1$ ablesen können und folgern, dass $\left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle \simeq |1, 1\rangle$.

- Analog findet man für $m = -1$, dass $\left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle \simeq |1, -1\rangle$.

- Die J^2-Eigenzustände für $m = 0$ können nun als Linearkombination der übrigen Eigenzustände aus (a) dargestellt werden. Nach obigem Schema wenden wir erneut J^2 auf eine solche Linearkombination ($\lambda, \mu \in \mathbb{C}$) an:

$$\begin{aligned}
&J^2 \left(\lambda \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle + \mu \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \right) \\
=&\frac{3}{2} \left(\lambda \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle + \mu \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \right) \\
&\quad - \frac{\lambda}{2} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle - \frac{\mu}{2} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \\
&\quad + \lambda \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle + \mu \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle
\end{aligned}$$

  Damit diese Linearkombination Eigenzustand mit EW γ ist, muss gelten

$$\frac{\lambda + \mu}{\lambda} = \gamma\,, \qquad \frac{\lambda + \mu}{\mu} = \gamma\,, \qquad \gamma = j(j+1)\,,$$

  und folglich $\lambda = \pm\mu$. Nehmen wir noch die Normierungsbedingung für die Linearkombination hinzu ergibt sich $\lambda^2 = \mu^2 = \frac{1}{2}$.

  - *Möglichkeit A*: $\lambda = \mu = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und somit $j = 1$.
    Der entsprechende Eigenzustand ist nun

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle + \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \right) \simeq |1, 0\rangle$$

  - *Möglichkeit B*: $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\mu = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ und somit $j = 0$.
    Der entsprechende Eigenzustand ist nun

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle - \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \right) \simeq |0, 0\rangle$$

  Wir können also systematisch eine neue Basis für den Produktraum einführen, in der sich die Zustände gemäss ihres Gesamtspins j sortieren lassen ($\rightarrow$ Unterräume). Für unseren Fall haben wir ein Triplett für $j = 1$ und ein Singlett für $j = 0$ gefunden. Für den allgemeinen Fall bedient man sich entsprechender Theoreme um sich die Arbeit des Zerlegens zu erleichtern.

(c) Wir untersuchen, wie sich die Zustände bei $(j_1, m_1) \leftrightarrow (j_2, m_2)$ verhalten. Klarerweise ändern sich $\left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle$ und $\left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle$ bei der Vertauschung nicht und damit bleiben die $j = 1$ Zustände also unverändert.

Analog sieht man, dass die Linearkombination mit $j = 0$ ihr Vorzeichen wechselt, d.h. $|0, 0\rangle \rightarrow -|0, 0\rangle$.

Die Triplet-Zustände sind also symmetrisch bezüglich Teilchen-Vertauschung und das Singlet ist anti-symmetrisch.