Übung 1. *[Effekt eines ausgedehnten Atomkerns auf die Energieniveaus des H-Atoms]*

Sei das Proton durch eine gleichmässig geladene dünne Kugelschale mit Radius b beschrieben.

a) Zeige, dass in erster Ordnung Störungstheorie die relative Änderung der Grundzustandsenergie im Wasserstoffatom in der Näherung $b/a_0 \ll 1$ gegeben ist durch

$$\frac{E^{(1)}}{E^{(0)}} = -\frac{4b^2}{3a_0^2}, \tag{1}$$

wobei a_0 der Bohr-Radius ist.

Hinweis: der Radius des Protons ist etwa $b \approx 10^{-15}$ m.

b) Warum ist die relative Änderung der Grundzustandsenergie viel grösser, wenn man ein μ^- betrachtet, das einen Bleikern umkreist?

Übung 2. *[Variationsverfahren]*

Wir wollen den Grundzustand des eindimensionalen Potentialtopfs mit unendlich hohen Wänden,

$$V(x) = \begin{cases} 0\,, & |x| < a\,, \\ \infty\,, & |x| \geq a\,, \end{cases} \tag{2}$$

abschätzen. Die exakte Lösung ist gegeben durch,

$$\phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right)\,, \tag{3}$$

$$E_0 = \left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)\left(\frac{\pi^2}{4a^2}\right)\,. \tag{4}$$

(a) Offensichtlich muss die Wellenfunktion bei $x = \pm a$ verschwinden. Des Weiteren kann die Wellenfunktion des Grundzustands keine weiteren Nullstellen haben. Ein simpler analytischer Ansatz (ohne Variationsparameter), der beides erfüllt, ist eine Parabel durch $x = \pm a$,

$$\phi(x) = a^2 - x^2\,. \tag{5}$$

Berechne das Energiefunktional für diesen Ansatz.

(b) Wir wählen nun einen anspruchsvolleren Ansatz mit einem Variationsparameter λ,

$$\phi(x) = |a|^\lambda - |x|^\lambda\,. \tag{6}$$

Schätze mit dem Ritz'schen Variationsverfahren die Grundzustandsenergie für diesen Ansatz ab.

Übung 3. *[Positronium im magnetischen Feld]*

Betrachten Sie den Grundzustand ($l = 0$) des Positroniums, ein exotisches Atom, das aus einem Positron und einem Elektron besteht. Wenn das Positronium sich in einem magnetischen Feld $\vec{B}$ befindet, lässt sich der Hamiltonoperator als $H = H_0 + H_S + H_B$ schreiben, wobei H_0 der Bohr'sche Hamiltonoperator ist, $H_S = A\,\vec{s}_p \cdot \vec{s}_e$ die Wechselwirkung zwischen den Spins der beiden Teilchen beschreibt und $H_B = -(\,\vec{\mu}_p + \vec{\mu}_e) \cdot \vec{B}$ die potentielle Energie durch die Wechselwirkung mit dem äusseren Feld ist.

(a) Welche Darstellung der Eigenzustände von Spins und Drehimpuls ist für den Fall $\vec{B} = 0$ am besten geeignet? Bestimmen Sie die Energieaufspaltungen durch H_S.

(b) Betrachten Sie nun den Fall eines schwachen magnetischen Feldes ($H_B \ll H_S$). Zeigen Sie, dass die Energieniveaus von $H_0 + H_S$ in erster Ordnung von der Störung H_B nicht verändert werden. Berechnen Sie die Zustandskorrekturen erster Ordnung, um die Energiekorrekturen zweiter Ordnung zu bestimmen.

(c) Wenn das äussere Feld ausreichend stark ist, kann H_S ignoriert werden, sodass $H = H_0 + H_B$. Welche Darstellung der Zustände eignet sich in diesem Fall am besten? Bestimmen Sie die Energieaufspaltungen durch H_B.