Übung 1. *[Feinstruktur-Konstante]*

Berechne den Erwartungswert $\langle v^2 \rangle / c^2 = \alpha^2$ bezüglich des Grundzustandes des Wasserstoffatoms, wobei $v := \frac{i}{\hbar}[H, r]$ der Geschwindigkeitsoperator und c die Lichtgeschwindigkeit ist. Welchen Zahlenwert hat die dimensionslose Konstante α?

Übung 2. *[Tritium-Zerfall]*

Ein Tritium-Atom sei im Grundzustand, wenn der Kern plötzlich in einen Helium-Kern zerfällt und dabei ein sehr schnelles Elektron emittiert, das das Atom verlässt ohne das Valenzelektron zu stören. Finde die Wahrscheinlichkeit, dass das resultierende $^3\mathrm{He}^+$-Ion sich in einem

(a) 1s Zustand

(b) 2s Zustand

befindet. Welche Auswahlregel lässt sich für die l-Quantenzahl in diesem Übergang finden?

Übung 3. *[Freies Teilchen im Magnetfeld]*

Der Hamiltonoperator eines freien Teilchens der Masse m und der Ladung q, das sich im Magnetfeld $\mathbf{B}$ mit zugehörigem Vektorpotential $\mathbf{A}$ befindet, lautet

$$H = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 .$$

Im Folgenden sei $\mathbf{A}$ gegeben durch $\mathbf{A} = \frac{1}{2}(-By, Bx, 0)$ mit $B = \mathit{const}$.

a) Welche Eichbedingung erfüllt $\mathbf{A}$ und wie lautet das dazugehörige Magnetfeld $\mathbf{B}$?

b) Gib den Hamiltonoperator für das gegebene Vektorpotential explizit an und zeige, dass er die Gestalt $H = H_z + H_{xy}$ annimmt. Spalte durch einen Separationsansatz den z-Anteil der zeitunabhängigen Schrödinger-Gleichung ab, und gib die Wellenfunktion und den Energiebeitrag dieses Anteils an.

c) Zeige, dass der xy-Anteil H_{xy} des Hamiltonoperators mit L_z vertauscht.

H_{xy} beschreibt einen zweidimensionalen harmonischen Oszillator mit der Kreisfrequenz $\omega = qB/2m$ mit einem Zusatzterm, der proportional zu L_z ist. In Analogie zum eindimensionalen Oszillator führen wir daher zunächst die Operatoren a_x und a_y, sowie deren hermitesch konjugierte ein. Es zeigt sich dann, dass es sinnvoll ist, anstatt a_x und a_y die Linearkombinationen

$$a_r = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x - \mathrm{i}a_y) \qquad \text{und} \qquad a_l = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x + \mathrm{i}a_y)$$

zu verwenden.

d) Bestimme die Kommutatoren zwischen $a_r, a_l, a_r^\dagger, a_l^\dagger$.

e) Wie lauten H_{xy} und L_z ausgedrückt in diesen Operatoren? Motiviere durch die Betrachtung von L_z die verwendeten Indizes l und r.

Hinweis. Führe dazu Besetzungszahloperatoren N_r und N_l ein.