MMP II
Klausur

FS 19
Prof. Ph. Jetzer

Diese Klausur besteht aus 8 Aufgaben. Um die Klausur zu bestehen, wird nicht erwartet, dass in der vorhandenen Zeit alle Aufgaben gelöst werden. Einfach versuchen, so viele Aufgaben wie möglich zu lösen!

Vorname	
Name	
Matrikel-Nr.	

1	2	3	4	5	6	7	8	Total

(Bitte leer lassen!)

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 [Analytische Funktionen und Laurent-Reihen (7 Punkte)]

a) Für $z \in \mathbb{C}$, löse die Gleichung $\sin z = 2$. 1 Punkt

b) Gegeben sei die Gammafunktion $\Gamma(z)$ mit folgenden Eigenschaften:

1) $\Gamma(z)$ ist holomorph in der Region $\Re(z) > 0$,
2) $\Gamma(n) = (n-1)!$ für $n \in \mathbb{N}^+$,
3) $\Gamma(z)$ erfüllt die Gleichung

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}\,.$$

Beweise, dass $\Gamma(z)$ einfache Pole nur bei $z_k = -k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ hat. Was ist das Residuum von $\Gamma(z)$ an der Stelle z_k? 3 Punkte

c) Berechne die Laurent-Reihe in $z = 0$ der Funktion

$$f(z) = \frac{4+z}{z^3 + 3z^2}\,.$$

Was ist das Residuum von $f(z)$ in $z = 0$? 3 Punkte

Aufgabe 2 [Analytische Funktionen und Laurent-Reihen (10 Punkte)]
Betrachte die Funktion

$$f(z) = \frac{\tan \pi z}{(z-a)^2}\,, \qquad \Im(a) \leq 0\,.$$

a) Finde alle Null- und Singularpunkte von $f(z)$ und klassifiziere jede Singularität. Berechne das Residuum von $f(z)$ an jeder isolierten Singularität. 4 Punkte

b) Berechne auf zwei verschiedene Weisen mit dem Residuensatz das Integral

$$I = \int_{-\infty+i\epsilon}^{\infty+i\epsilon} f(z)dz\,, \qquad \epsilon \in \mathbb{R}^+\,.$$ 3 Punkte

c) Durch Vergleich der beiden Ergebnisse von I erhält man die Summe zweier Reihen. Nutze diesen Ausdruck, um die Identitäten

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$ 3 Punkte

zu beweisen.
Hinweis: Benutze die Werte $a = 0, \frac{1}{2}$. Bei der Berechnung der Laurent-Reihe in $a = 1/2$ verwende die trigonometrische Identität $\cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -\sin\alpha$.

Aufgabe 3 [Integrale (6 Punkte)]
Berechne die Integrale

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1+4\sin^2 x} dx\,, \qquad I_2 = \int_0^{\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{1+x^2} dx\,. \qquad \text{3+3 Punkte}$$

Aufgabe 4 [Komplexe Differentialgleichungen (8 Punkte)]
Gegeben sei die Differentialgleichung

$$4(1-z^2)u'' - 8zu' + 3u = 0\,, \qquad z \in \mathbb{C}\,.$$

a) Bestimme und klassifiziere ihre Singularitäten. Gehört diese Differentialgleichung der Fuchs' schen Klasse an? 2 Punkte

b) Berechne die charakteristischen Exponenten ρ_1 und ρ_2 der Differentialgleichung in jeder ausserwesentlichen Singularität. Kann die allgemeine Lösung in der Riemann'schen Schreibweise ausgedrückt werden? 2 Punkte

c) In der Umgebung von $z = 0$ finde, als Potenzreihen, zwei linear unabhängige Lösungsfunktionen, für die gilt:

$$u_1(z) = 1 + \mathcal{O}(z^2)\,, \qquad u_2(z) = z + \mathcal{O}(z^3)\,.$$

Finde für beide Lösungen die Rekursionsgleichung zwischen den Reihenkoeffizienten und berechne die ersten drei Koeffizienten, die nicht Null sind. Welchen Konvergenzradius haben diese Potenzreihen? 3 Punkte

d) Benutze die Rekursionsgleichungen, um $u_1(z)$ und $u_2(z)$ als hypergeometrische Funktionen ${}_2F_1(a,b,c;z)$ zu schreiben. 1 Punkt
Hinweis: Drücke alle Reihenkoeffizienten als Funktion von c_0 und c_1 aus.

Aufgabe 5 [Gruppentheorie (9 Punkte)]
Sei G eine Gruppe.

a) Sei H eine Untergruppe von G, und

$$\tilde{H} := \{h\, g^{-1} | g \in G,\ h \in H\}.$$

Ist $\tilde{H}$ eine invariante Untergruppe von G? 1 Punkt

b) Sei H eine Untergruppe von G. Beweise, dass die folgenden zwei Aussagen äquivalent sind:

i) $Hg = gH,\ \forall\, g \in G$

ii) $gHg^{-1} \subset H,\ \forall\, g \in G.$ 1 Punkt

c) Seien H_g und H_u die Untermengen von S_3, die nur aus geraden, bzw. ungeraden Permutationen bestehen:

$$H_g = \{id, (123), (321)\} \tag{1}$$
$$H_u = \{(12), (23), (13)\} \tag{2}$$

i) Argumentiere, ob H_g und H_u invariante Untergruppen von S_3 sind.

ii) Gebe explizit die Faktorgruppe S_3/H_g an. 3 Punkte

d) Sei $H \triangleleft G$ ein Normalteiler (invariante Untergruppe). Zeige, dass für die Gruppenordnungen folgender Zusammenhang gilt:

$$|G/H| = \frac{|G|}{|H|}$$ 1 Punkt

e) Beweise, dass es für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Untergruppe von S_n gibt, die isomorph zu D_n ist. 2 Punkte

f) Zeige, dass eine Darstellung eine Operation einer Gruppe auf einem Vektorraum ist. Ist jede Gruppenoperation auch eine Darstellung? 1 Punkt

Aufgabe 6 [Lie-Gruppen und Darstellungen(6 Punkte)]
Sei $R(t)$ ($t \in \mathbb{R}$) eine differenzierbare Kurve in $SO(n)$, mit $R(0) = \mathbb{1}$. Eine infinitesimale Rotation auf $\mathbb{R}^n$ wird dann durch

$$\Omega := \frac{d}{dt} R(t)|_{t=0}$$

erhalten. Die Menge aller infinitesimalen Rotationen bildet die Lie-Algebra $\mathfrak{so}(n)$.

a) Beweise, mithilfe der obigen Definition, die folgenden Behauptungen:

   i) Die Linearkombination $\alpha_1\Omega_1 + \alpha_2\Omega_2$ von zwei infinitesimalen Rotationen Ω_1 und Ω_2 ist wiederum eine infinitesimale Rotation.

   ii) Ω ist schiefsymmetrisch. 2 Punkte

b) Sei nun ρ eine unitäre Darstellung von SO(n), und sei

$$\tilde{\rho}(\Omega) := \frac{d}{dt} \rho(R(t))|_{t=0}.$$

   Für welche Operation auf $\mathfrak{so}(n)$ ist $\tilde{\rho}$ eine Darstellung? Zeige, dass $\tilde{\rho}$ anti-hermitesch ist, d.h. $\tilde{\rho}(\Omega)^\dagger = -\tilde{\rho}(\Omega)$. 2 Punkte

c) Bestimme die Dimension des Raumes aller $n \times n$-schiefsymmetrischen Matrizen. Welcher Zusammenhang gibt es mit der Dimension von $SO(n)$, und warum? 2 Punkte

Aufgabe 7 [Darstellungstheorie (6 Punkte)]

a) Sei $\rho_S : S_3 \to GL(3, \mathbb{R})$ die Standarddarstellung der symmetrischen Gruppe S_3. Gegeben sei eine orthonormale, positiv orientierte Basis (e_1, e_2, e_3) von $\mathbb{R}^3$; sie ist durch

$$\rho_S(\pi)\, e_i = e_{\pi(i)}$$

   definiert.

   i) Schreibe explizit die Matrizen $\rho(\pi)$ für $\pi \in \{id, (13), (132)\} \subset S_3$. (Die Notation, die für die Elemente von S_3 verwendet wird, ist frei wählbar. Sie sollte jedoch klar und eindeutig sein).

   ii) Ist ρ_S irreduzibel? (Argumentiere!)

   iii) Falls möglich, gebe eine Zerlegung von ρ_S in irreduziblen Darstellungen an.
   Hinweis: S_3 ist isomorph zu C_{3v}, d.h., sie besitzt genau die gleichen Eigenschaften. Die irreduziblen Darstellungen müssen nicht explizit beschrieben werden. Es genügt, ihren Charakter zu benutzen. 3 Punkte

b) Sei H die Untergruppe von S_3, die nur aus geraden Permutationen besteht:

$$H = \{id, (123), (321)\}$$

Bestimme die Charaktertafel der irreduziblen Darstellungen von H. 3 Punkte

Hinweise:

- Verwende, für die unbekannten Elemente $x, x', ...$ der Charaktertafel, den Ansatz $x = e^{i\phi}, x' = e^{i\phi'}, ...$
- Zur Erinnerung: $\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -1/2$.

Aufgabe 8 [Tensoren (3 Punkte)]

a) Betrachte den Tensor R_{ijkm} mit $i, j, k, m = 1, 2, 3, 4$.

i) Wie viele unabhängige Komponenten hat dieser Tensor?

ii) Wenn $R_{ijkm} = -R_{ijmk} = -R_{jikm}$ gilt, wie viele unabhängige Komponenten hat R_{ijkm} dann?

iii) Was ist, wenn wir zudem noch fordern, dass $R_{ijkm} = R_{kmij}$? 2 Punkte

b) Benutze die Transformationsformel eines kovarianten Tensors zweiter Stufe

$$\overline{g}_{ij} = g_{ab} \frac{\partial x^a}{\partial \overline{x}^i} \frac{\partial x^b}{\partial \overline{x}^j}$$

um g_{ab} durch $\overline{g}_{ij}$ auszudrücken. 1 Punkt