Übung 1. *[Streuung an der endlichen Potentialbarriere]*

Betrachte die Streuung eines von $x = -\infty$ einfallenden Teilchenstromes an der Potentialbarriere

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & \text{für } x \in \left]-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right[\\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad \text{wobei} \quad V_0 > 0\,.$$

(a) Berechne die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten $R(E)$ und $T(E)$ für die Teilchenenergien $0 < E < V_0$ und $E > V_0$.

(b) Skizziere die Energieabhängigkeit von $R(E)$ für Energien $E > V_0$ und interpretiere das Ergebnis.

(c) Skizziere die Ortswahrscheinlichkeitsdichte $|\psi(x)|^2$ für Energien $0 < E < V_0$. Wie verhält sich die Durchlässigkeit $T(E)$ in diesem Energiebereich im Grenzwert grosser Barrierenbreite a?

Übung 2. *[Dynamik im δ-Potential]*

Im Folgenden untersuchen wir das eindimensionale, attraktive Potential

$$V(x) = -\frac{\hbar^2\alpha}{2m}\,\delta(x)\,, \qquad \text{wobei} \quad \alpha > 0\,. \tag{1}$$

(a) Wie lautet die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung für dieses Potential?

(b) Zeige mit Hilfe dieser Schrödinger-Gleichung, dass die Eigenfunktionen $\psi(x)$ eine unstetige Ableitung der Form

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left[\partial_x\psi(\epsilon) - \partial_x\psi(-\epsilon)\right] = \eta\,\psi(0)$$

haben. Welchen Wert nimmt η für das gegebene Potential an? Was ändert sich, wenn man zu $V(x)$ ein stetiges Potential $U(x)$ addiert?

(c) Gib die allgemeine Lösung der zeitunabhängigen Schrödinger-Gleichung für Energien $E < 0$ im Bereich $x < 0$ und $x > 0$ an.

(d) Wie viele gebundene Zustände hat dieses Potential? Bestimme die zugehörigen Energien und gib die normierten Wellenfunktionen an.

Übung 3. *[Floquet Theorem]*

Betrachten Sie die eindimensionale Schrödingergleichung mit einem periodischen Potential $V(x) = V(x+a)$. Der Translationsoperator $T(a)$ ist gegeben durch $T(a) = \exp(ipa/\hbar)$, wobei p der Impulsoperator ist.

(a) Zeigen Sie, dass $T(a)\eta(x) = \eta(x+a)$ für eine beliebige Testfunktion $\eta(x)$.

(b) Zeigen Sie, dass der Translationsoperator $T(a)$ mit dem Hamiltonoperator des Systems $H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$ vertauscht.

(c) Zeigen Sie, dass der Translationsoperator $T(a)$ unitär ist. Was folgt daraus für die Eigenwerte von $T(a)$?

(d) Zeigen Sie unter Verwendung von Aufgabenteil (a), (b) und (c), dass für die gemeinsamen Eigenfunktionen $\varphi(x)$ des Hamiltonoperator H und des Translationsoperators $T(a)$

$$\varphi(x+a) = \exp(ika)\varphi(x) \quad (|ka| \leq \pi)$$

gilt.
Hinweis: Um die Form der Eigenwerte von T weiter einzuschränken benutzen Sie, dass $T^2(a)\varphi(x) = T(2a)\varphi(x)$.