Übung 1. ***[Schwarzsche Ungleichung]***

Zeige, dass für das Skalarprodukt zweier Wellenfunktionen ϕ und ψ folgende Ungleichung gilt

$$|\,(\phi,\psi)\,|^2 \leq (\phi,\phi)\,(\psi,\psi)\,.$$

Übung 2. ***[Energieeigenwerte]***

Betrachte das Zweizustandssystem mit dem Hamiltonoperator

$$H = a\left(|1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2| + |1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|\right)\,,$$

wobei a die Dimension einer Energie hat. Berechne die Energieeigenwerte und die dazugehörigen normierten Eigenzustände, in der Basis $|1\rangle$ & $|2\rangle$.

Übung 3. ***[Kompatible Operatoren]***

Ein dreidimensionaler Ketraum sei durch die Orthonormalbasis, $|1\rangle$, $|2\rangle$ und $|3\rangle$, aufgespannt. Die Operatoren A und B wirken folgendermaßen auf die Basisvektoren ($a, b \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned} A\,|1\rangle &= a\,|1\rangle\,, & B\,|1\rangle &= b\,|1\rangle\,, \\ A\,|2\rangle &= -a\,|2\rangle\,, & B\,|2\rangle &= ib\,|3\rangle\,, \\ A\,|3\rangle &= -a\,|3\rangle\,, & B\,|3\rangle &= -ib\,|2\rangle\,. \end{aligned} \tag{1}$$

(a) Das Spektrum des Operators A ist offensichtlich degeneriert. Hat Operator B auch ein degeneriertes Spektrum?

(b) Zeige, dass die Operatoren A und B kommutieren.

(c) Konstruiere eine neue orthonormale Basis, bei welcher die Basisvektoren die Eigenvektoren zu beide A und B sind. Finde die Eigenwerten von A und B für alle drei Eigenvektoren. Definieren die Eigenwerte jeden Eigenvektor vollständig?

Übung 4. ***[Eigenwerte von Operatoren]***

Ein Operator A, der die Observable α beschreibt, habe zwei normierte Eigenfunktionen Φ_1 und Φ_2 mit den Eigenwerten a_1 und a_2. Ein anderer Operator B, der die Observable β beschreibt, habe die normierte Eigenfunktionen χ_1 und χ_2 mit den Eigenwerten b_1 und b_2. Die Eigenfunktionen hängen über die Beziehung

$$\Phi_1 = \frac{1}{\sqrt{13}}(2\chi_1 + 3\chi_2), \quad \Phi_2 = \frac{1}{\sqrt{13}}(3\chi_1 - 2\chi_2)$$

zusammen. Die Observable α wird gemessen und wir erhalten den Wert a_1. Nun werde die Observable β gemessen, und darauffolgend wieder die Observable α. Zeige, dass die Wahrscheinlichkeit, den Wert a_1 ein wiederholtes Mal zu messen, gerade $\frac{97}{169}$ ist.