Teil II : Kinetische Gastheorie

Kinetische Gastheorie : (1) verdünntes Gas bei nicht zu hohen Temperaturen, damit innere Anregungen der Moleküle (Atome) nicht zu berücksichtigen sind. Nur elastische Stösse.

(2) Diese Theorie gilt auch für den nicht Gleichgewichtszustand. Also kann man damit auch die Entwicklung zum G.Zustand berechnen, d.h. also die Transporttheorie (Wärmeleitung, Diffusion, ..)

1. Boltzmann Gleichung

- Zustand eines Moleküls (bei t):

$(\vec{p}, \vec{q})$ $\vec{q} = \vec{r}$ (Ort) $\vec{p} = m\vec{v}$ (Impuls) $\rightarrow$ $(\vec{r}, \vec{v}) = 1$ Punkt im 6 Dim. Phasenraumes eines Moleküls $=$ μ-Raum.

(einatomige Moleküle, 1 Sorte)

- Zustand des Gases: N Punkte im μ-Raum
- Statistische Beschreibung: Verteilungsfunktion f:

$$f(\vec{r}, \vec{v}, t)\, d^3r\, d^3v = \text{Zahl der Teilchen in } d^3r\, d^3v \text{ (um } (\vec{r}, \vec{v}))$$

- Normierung: $N = \int d^3r\, d^3v\, f(\vec{r}, \vec{v}, t)$

($\int d^3r$ über Volumen, $\int d^3v$ über alle Geschwindigkeiten: $\int_{-\infty}^{+\infty} d^3v$)

- Die mittlere Teilchenzahldichte ist

$$n(\vec{r},t) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3v\, f(\vec{r},\vec{v},t)$$

oder für irgend eine Funktion $A(\vec{r},\vec{v})$ kann man sein Mittelwert bestimmen durch

$$\langle A\rangle(\vec{r},t) = \frac{\int A(\vec{r},\vec{v})\, f(\vec{r},\vec{v},t)\, d^3v}{\int f(\vec{r},\vec{v},t)\, d^3v}$$

1.1 Die Stossfreie Boltzmanngleichung

Es gibt Situationen, bei denen Zusammenstösse sehr selten sind. Beispiele: Kugelsternhaufen, verdünnte Plasmen.
Es soll noch ein äusseres Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r},t)$ zugelassen werden ($\vec{F}$ sei unabhängig von $\vec{v}$).
Während eines kleinen Zeitintervalls Δt ändern sich die Phasenpunkte gemäss:

$$\vec{r} \to \vec{r}\,' = \vec{r} + \vec{v}\Delta t \quad , \quad \vec{v} \to \vec{v}\,' = \vec{v} + \underbrace{\frac{\vec{F}}{m}}_{\text{Beschleunigung}}\Delta t$$

Ohne Stösse gilt damit bis zur 1. Ordnung in Δt:

$$f(\vec{r},\vec{v},t)\, d^3r\, d^3v = f(\vec{r}+\vec{v}\Delta t, \vec{v}+\frac{\vec{F}}{m}\Delta t, t+\Delta t)\, d^3r'\, d^3v' =$$

$$= \left[f(\vec{r},\vec{v},t) + \Delta t\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}\frac{\partial}{\partial \vec{r}} f + \frac{\vec{F}}{m}\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}\right)\right] d^3r'\, d^3v'$$

Nach dem Satz von Liouville in der Mechanik gilt $d^3r\,d^3v = d^3r'\,d^3v'$. Somit findet man:

$$f(\vec{r}',\vec{v}',t') = f(\vec{r},\vec{v},t) + D_t f \cdot \Delta t$$

wobei: $$D_t = \partial_t + \vec{v}\frac{\partial}{\partial\vec{r}} + \frac{\vec{F}}{m}\frac{\partial}{\partial\vec{v}}$$

die sog. hydrodynamische Ableitung ist.
Wir erhalten also die stossfreie Boltzmann-Gleichung

$$\mathcal{D}_t f = 0$$

1.2 Mit Stössen

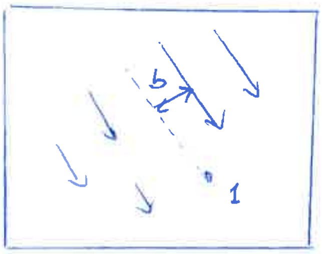
$$\mathcal{D}_t f = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{Stösse}}$$

- Approx: Nur zweier-Stösse → d.h. verdünntes Gas.

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{Stösse}} d^3r\,d^3v\,dt = (R^+ - R^-)\,d^3r\,d^3v\,dt$$

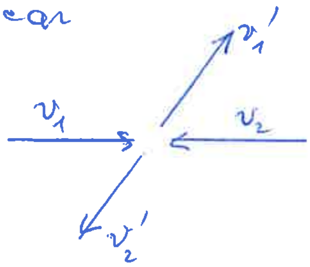
⇒ + Anzahl der hineingestreuten Teilchen
− Anzahl der hinausgestreuten Teilchen
(Aus Volumen $d^3r\,d^3v$)

Annahme: die Ortsverteilung (innerhalb d^3r) ist statistisch uniform. (ZB. der Stossparameter b ist uniform verteilt)



β_r

Zweierstöße: – gleiche Teilchen (Spinlose Teilchen)
– Energie – Impuls Erhaltung (E_{SP})
(im Schwerpunktsystem: alle $|\vec{v}|$ gleich, kollinear
(SP: Schwerpunktsyst.)



– 2 Parameter:

(1) $E_{SP} \longleftrightarrow |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|$ = Relativ. Geschwindigkeit

(2) Streuwinkel ϑ_{SP}

(Streuquerschnitt unabhängig von $\varphi \longrightarrow$ Rot. symm. um Einfallsachse)

$$d\Omega = d(\cos\vartheta)\, d\varphi$$

– z.B. $\vec{v}_1, \vec{v}_2$: 1 = Target, 2 = Strahl

Def: F ≡ Fluss = Strahlteilchen pro sec. pro Flächeneinheit (Fläche senkrecht zu $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$)

Def: $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ ≡ Differentielle Streuquerschnitt (ist zu messen, oder klassisch oder QM zu berechnen).

$F \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$ = Anzahl Strahlteilchen welche pro sec in $d\Omega$ gestreut werden (für 1. Target)

(Raumwinkel)

$$\underbrace{R^- \, d^3r\, d^3v_1}_{\substack{\text{Zahl der durch} \\ \text{Stösse aus } d^3r\,d^3v_1 \\ \text{entfernten Teilchen} \\ \text{(pro sec)}}} = \underbrace{f(\vec r, \vec v_1, t)\, d^3r\, d^3v_1}_{\substack{\text{Anzahl} \\ \text{"Targetteilchen" (1)}}} \underbrace{\int d^3v_2\, f(\vec r, \vec v_2, t)\, |\vec v_2 - \vec v_1| \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) d\Omega}_{\underbrace{\substack{\text{Fluss der} \\ \text{"Strahl"-Teilchen (2)} \\ \text{relativ zu (1)}}}_{\text{für 1 Target}}}$$

R^+ : $\underbrace{v_1' v_2' \to v_1 v_2}_{\text{inverse Kollision}}$ in d^3v_1 hineingestreut

inverse Kollision : somit gleiches $\frac{d\sigma}{d\Omega}$

Also entsprechend:

$$R^+ d^3r\, d^3v_1' = f(\vec r, \vec v_1', t)\, d^3r\, d^3v_1' \int d^3v_2'\, f(\vec r, \vec v_2', t)\, |\vec v_2' - \vec v_1'| \, \frac{d\sigma}{d\Omega}\, d\Omega$$

jedoch $d^3v_1'\, d^3v_2' = d^3v_1\, d^3v_2$, $|\vec v_2' - \vec v_1'| = |\vec v_2 - \vec v_1|$

weiterhin bezeichnen wir $f_1' = f(\vec r, \vec v_1', t)$, $f_2' = f(\vec r, \vec v_2', t)$

$f_1 = f(\vec r, \vec v_1, t)$, $f_2 = f(\vec r, \vec v_2, t)$

$\vec v_1'$ und $\vec v_2'$ hängen von $\vec v_1$ und $\vec v_2$ ab ($\vec v_1' = \mathrm{fkt}(\vec v_1, \vec v_2)$

$\vec v_2' = \mathrm{fkt}(\vec v_1, \vec v_2)$)

$\left(R^+ d^3r\, d^3v_1 = d^3r\, d^3v_1 \int d^3v_2\, |\vec v_2 - \vec v_1| \frac{d\sigma}{d\Omega}\, d\Omega\, (f_2' f_1') \right)$

Dann ist

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial t}\right)_{\text{Stösse}} = (R^+ - R^-) = \int d^3v_2 \int d\Omega\, \frac{d\sigma}{d\Omega}\, |\vec v_2 - \vec v_1| \left(f_1' f_2' - f_1 f_2\right)$$

Boltzmann-Gleichung lautet dann

$$\mathcal{D}_t f_1 = \left(\frac{\partial f_1}{\partial t}\right)_{\text{Stösse}}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_1 \frac{\partial}{\partial \vec{r}} + \frac{\vec{F}}{m}\frac{\partial}{\partial \vec{v}_1}\right) f_1 = \int d^3v_2 \int d\Omega \, \frac{d\sigma}{d\Omega} \, |\vec{v}_2 - \vec{v}_1| \, (f_1' f_2' - f_1 f_2)$$

2. Das H-Theorem von Boltzmann

Betrachte die Grösse

$$H(f) = \int d^3r \, d^3v \, f(\vec{r}, \vec{v}, t) \log f(\vec{r}, \vec{v}, t)$$

(eine Art "Entropie").

H-Theorem von Boltzmann:

Ist f eine Lösung der Boltzmann-Gleichung, so gilt

$$\frac{d}{dt} H(f) \leq 0$$

Das Gleichheitszeichen gilt genau dann wenn f einer Gleichgewichtsverteilung entspricht ($\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial t} = 0$ Zeitunabhängige Lösung der Boltzmann-Gleichung), d.h. wenn f eine lokale Maxwell-Verteilung ist

$$f(\vec{r}, \vec{v}) = g(\vec{r}) \, e^{-\beta(\vec{v} - \vec{v}_0)^2}$$

wobei β und $\vec{v}_0$ von $\vec{r}$ abhängen, aber nicht von $\vec{v}$, können.

Für den Beweis betrachten wir den Spezialfall wo f unabhängig von $\vec{r}$ ist und keine äussern Kräfte (d.h. $\vec{F}=0$). Dies zur Vereinfachung, aber man kann analog den allgemeineren Fall behandeln.

Dann $\partial_t f_1 = \frac{\partial f_1}{\partial t}$

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = \int d^3 v_2 \int d\Omega \, |\vec{v}_2 - \vec{v}_1| \frac{d\sigma}{d\Omega} (f_1' f_2' - f_1 f_2)$$

Gleichgewichtsverteilung entspricht dann $\frac{\partial f_1}{\partial t} = 0$

Hinreichende Bedingung dafür ist

$$f_1' f_2' - f_1 f_2 = 0 \xrightarrow[1]{} \frac{\partial f_1}{\partial t} = 0$$

<u>Beh.</u> auch notwendige Bed. für Gleichgew.

<u>Bew</u> $$H(f_1) = \int d^3 v_1 \, f_1(\vec{v}_1, t) \log f_1(\vec{v}_1, t)$$

$$\frac{dH(f)}{dt} = \int d^3 v_1 \frac{\partial f_1}{\partial t} (1 + \log f_1) \qquad (*)$$

daraus sieht man dass falls f Gleichgew. d.h. $\frac{\partial f_1}{\partial t} = 0 \xrightarrow{2}$ folgt $\frac{dH}{dt} = 0$.

Setze Boltzmann-Gleichung in $(*)$ ein (anstelle von $\frac{\partial f_1}{\partial t}$)

Dann erhält man:

$$\frac{dH(f)}{dt} = \int d^3v_1 \int d^3v_2 \int d\Omega\, |\vec{v}_2-\vec{v}_1| \frac{d\sigma}{d\Omega} (f_1'f_2'-f_1f_2)[1+\log f_1]$$

- ($\vec{v}_1$ mit $\vec{v}_2$ vertauschen (invariant da σ inv. unter vertauschung von $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$)

danach "neues" Integral + "altes" summieren und $\times \frac{1}{2}$

ergibt wieder $\frac{dH}{dt}$, jedoch [ ] wird $\frac{1}{2}[2+\log f_1+\log f_2]$

$$= \left(1+\frac{\log f_1f_2}{2}\right)$$

- Vertausche $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ mit $\vec{v}_1{}', \vec{v}_2{}'$ ($d^3v_1 d^3v_2 = d^3v_1' d^3v_2'$, $|\vec{v}_2-\vec{v}_1| = |\vec{v}_2{}'-\vec{v}_1{}'|$ etc) dh. ergibt dann : $-\left(1+\frac{\log f_1'f_2'}{2}\right)$

- Summiere wieder und nehme $\frac{1}{2} \rightarrow \frac{dH}{dt}$:

letzten Term : $\frac{1}{4}[\log f_1f_2 - \log f_1'f_2']$

d.h. Integrand $\sim \int d\Omega\, |\vec{v}_2-\vec{v}_1| \frac{d\sigma}{d\Omega} (a'-a)\underbrace{(\log a-\log a')}_{\log\frac{a}{a'}}$

($a = f_1f_2$, $a' = f_1'f_2'$)

i) $a' \geq a \rightarrow \frac{a}{a'} \leq 1 \Rightarrow \log\frac{a}{a'} \leq 0 \quad (a'-a)\log\frac{a}{a'} \leq 0$

ii) $a \geq a' \rightarrow \frac{a}{a'} \geq 1 \Rightarrow \log\frac{a}{a'} \geq 0 \quad (a'-a)\log\frac{a}{a'} \leq 0$

Also integrand ≤ 0 für beliebiges a, d.h. für beliebiges f.

$\Longrightarrow \frac{dH(f)}{dt} \leq 0$ für beliebiges f. ($=0$ falls $a=a'$)

$$\frac{dH}{dt} = 0 \overset{③}{\Longrightarrow} f_1' f_2' - f_1 f_2 = 0 \overset{①}{\Longrightarrow} \frac{\partial f_1}{\partial t} = 0 \overset{②}{\Longrightarrow} \frac{dH}{dt} = 0$$

Also alle 3 Aussagen sind äquivalent (d.h. ①,②,③).

3. Maxwell Verteilung

Herleitung via Boltzmann-Gleichung.

Gleichgewicht $\longleftrightarrow$ $f_1' f_2' = f_1 f_2$

entsprechend $\log f_0(\vec{v}_1') + \log f_0(\vec{v}_2') = \log f_0(\vec{v}_1) + \log f_0(\vec{v}_2)$

für Gleichgew. Lösung.

$\log f_0$ ist formal eine additive Grösse

Also im allg.: $\log f_0(\vec{v}) = \sum_k a_k \chi_k(\vec{v})$

dabei sind χ_k alle von einander unabhängigen Erhaltungsgrössen des Stosses und a_k beliebige Konstante.

$\vec{v}$: $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_1' + \vec{v}_2'$ (Impulssatz) $\cdot \vec{a}_2$ (3)

v^2 : $v_1^2 + v_2^2 = v_1'^2 + v_2'^2$ (Energiesatz) $\cdot a_1$ (1)

c : $c + c = c + c$ (Massenerhaltung) a_3 (1)

beliebige Konstante.

Jede beliebige Linearkombination ist wieder eine Erhaltungsgrösse.

Allg. linearkombination: $\quad 1 \quad 3 \quad 1 = 5$

$$\log f_0(\vec{v}) = -A(\vec{v}-\vec{v}_0)^2 + \ln C$$

$$\rightarrow \quad f_0(\vec{v}) = C \exp\left[-A(\vec{v}-\vec{v}_0)^2\right]$$

(Maxwell-Verteilung).

Mittelwerte

a) Teilchendichte $\quad n = C \int d^3v \, e^{-A(\vec{v}-\vec{v}_0)^2}$

koord. translation

$$n = \frac{C}{A^{3/2}} \int d^3w \, e^{-w^2} = C\left(\frac{\pi}{A}\right)^{3/2}$$

$$\Longrightarrow \quad C = \left(\frac{A}{\pi}\right)^{3/2} n$$

(b) Mittlere Geschwindigkeit:

$$\vec{c} = \langle \vec{v} \rangle = \frac{1}{n} \int d^3v \, \vec{v} f_0$$

Man findet $\quad \vec{c} = \vec{v}_0$

(c) Mittlere Energie (betrachte Fall ohne Translation, d.h. $\vec{v}_0 = 0$)

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\int d^3v \, \frac{1}{2} m v^2 f_0(\vec{v})}{\int d^3v \, f_0(\vec{v})} = \frac{m}{2} \langle \vec{v}^2 \rangle$$

$$= \frac{3m}{4A} \quad \text{(mittlere Energie eines Moleküls)}$$

Es gilt: $\quad A = \frac{3}{4}\frac{m}{\bar{\varepsilon}}, \quad C = n\left(\frac{3m}{4\pi\bar{\varepsilon}}\right)^{3/2}$

(d) Druck

allg. Impulsstromdichte $\Pi_{ik} = m \int d^3v \, v_i v_k f \qquad i,k = 1,..,3$

Maxwellverteilung ist isotrop: also $i \neq k \quad \Pi_{ik} = 0$

zudem $\quad \Pi_{ik} = p \, \delta_{ik} \qquad (\text{für } \vec{v}_0 = 0)$

$$p = \frac{2}{3} n \bar{\varepsilon}$$

Vergleicht man dies mit der Temperaturdefinition durch das ideale Gas

$$p = n k T$$

so ergibt dies: $\quad \bar{\varepsilon} = \frac{3}{2} kT = \frac{m}{2} \langle v^2 \rangle$

Somit $\; A = \frac{m}{2kT} \;$ und $\; C = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2}$

Sodass die Maxwellverteilung (keine äussere Kräfte) lautet

$$f_0(\vec{v}) = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m(\vec{v}-\vec{v}_0)^2}{2kT}}$$

$\Big(\vec{v}_0 \neq 0$, dann $\quad \bar{\varepsilon} = \frac{m}{2} \langle (\vec{v} - \vec{v}_0)^2 \rangle$

$= \frac{3}{2} kT . \Big)$

4. Maxwell-Boltzmann Verteilung im äusseren Kraftfeld

Wir untersuchen die Gleichgewichtsverteilung eines verdünnten Gases bei Anwesenheit eines äußeren Kraftfeldes:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r})$$

Potential des Feldes.

Wir stellen den Ansatz:

$$f(\vec{r},\vec{v}) = B\, f_M(\vec{v})\, e^{-\phi(\vec{r})/kT}$$

$$= B\, n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\left(\frac{mv^2}{2}+\phi(\vec{r})\right)/kT}$$

(Setze $\vec{v}_0 = 0$)

Beweis: 1) $\dfrac{\partial f(\vec{r},\vec{v})}{\partial t} = 0$ da keine Zeitabhängigkeit vorhanden

2) $\left(\dfrac{\partial f(\vec{r},\vec{v})}{\partial t}\right)_{Stoss} = 0$ Term $e^{-\phi(\vec{r})/kT}$ hängt nicht von $\vec{v}$ ab und kann somit vor dem Integral gezogen werden

(d.h. $e^{-2\phi(\vec{r})/kT}\int d^3v_2 \int d\Omega\, |\vec{v}_1-\vec{v}_2|\, \dfrac{d\sigma}{d\Omega}\, (\underbrace{f'_{1M} f'_{2M} - f_{1M} f_{2M}}_{=0})$

(da Maxwell-Verteilung)

Also muss f noch folgende Differentialgleichung erfüllen:

$$\left(\vec{v}\frac{\partial}{\partial \vec{r}} + \frac{\vec{F}}{m}\frac{\partial}{\partial \vec{v}}\right) f(\vec{r},\vec{v}) = 0$$

Durch einsetzen sieht man sofort daß man erhält:

$$\underbrace{\left[\vec{v}\left(-\frac{1}{kT}\underbrace{\nabla\phi(\vec{r})}_{\vec{F}}\right)+\frac{\vec{F}}{m}\left(-\frac{m\vec{v}}{kT}\right)\right]}_{=0} f(\vec{r},\vec{v}) = 0$$

Somit erfüllt.

Normierungsbedingung $N = \int f(\vec{r},\vec{v})\, d^3r\, d^3v$

erhalten wir für die Konstante $B = \dfrac{V}{\int e^{-\phi(\vec{r})/kT} d^3r}$

$$n(\vec{r}) = \int f(\vec{r},\vec{v})\, d^3v$$

ist die Ortsabhängige Teilchendichte.

<u>Bsp</u> Gravitationsfeld der Erde $\phi = mgh$ $(\phi(\vec{r}) = \phi(x,y,z) = mgz)$

(isotherme Atmosphere, d. h. T = konst)

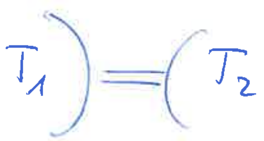
Ideales Gas, d. h. $p = nkT$

Man erhält dann (nach einigen Zwischenschritte)

Die Barometrische Höhenformel (gültig wenn T zeit- und Ortsunabhängig ist):

$$P = P_0\, e^{-\frac{mgh}{kT}}$$

5. Transportphänomene



Nichtgleichgewichtsphänomene

z. B. - Wärmeleitung

- Viskosität (innere Reibung)

Mittlere freie Weglänge

$Z \equiv$ Zahl der Stösse pro cm^3 pro sec.

$$= \int d^3v_1 \int d^3v_2 \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| \underbrace{f(\vec{r}, \vec{v}_1, t)}_{f_1} \underbrace{f(\vec{r}, \vec{v}_2, t)}_{f_2}$$

Approx: (1) $f \approx$ Maxwell

(2) $\sigma_{tot} \approx$ unabhängig von $\vec{v}_{rel} = |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|$

(d.h. $\vec{v}$ unabhängig)

Dann $\int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} = \sigma_{tot}$, $f = C \exp\left(-\frac{m v^2}{kT}\right)$ $(C \sim n)$

$$Z = \sigma_{tot} C^2 \int d^3V \int d^3v \, |\vec{v}| \exp\left[-\frac{m}{2kT}\left(2V^2 + \frac{1}{2}v^2\right)\right]$$

wobei $\left.\begin{array}{l} \vec{V} = \frac{1}{2}(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \\ \vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \end{array}\right\} \; 2\vec{V}^2 + \frac{1}{2}\vec{v}^2 = v_1^2 + v_2^2$

$$\Rightarrow \quad Z = \sigma_{tot} \, n^2 \, \bar{v} \, \frac{4}{\sqrt{2\pi}}$$

($\bar{v}$: Wahrscheinlichste Geschwindigkeit) Def siehe 76b)

- 1 Stoss bedeutet 2 Wege
- Anzahl Wege pro sec pro cm^3 = $2Z$
- Totale Weglänge (cm) pro sec pro cm^3 = $n \langle v \rangle$
  (statt pro sec → × t_c = Mittlere Zeit zwischen Kollisionen)
- Somit ergibt sich für die Mittlere freie Weglänge λ:

$\bar{v}$: $\quad \underbrace{\int d^3v}_{4\pi\, dv\, v^2} \exp\left(-\frac{m}{4kT} v^2\right)$

$$\sim \underbrace{\int dv\, v^2 \exp\left(-\frac{m}{4kT} v^2\right)}_{= dn} \rightarrow n \text{ (Teilchen/Volumen)}$$

für welche Geschwindigkeit v ist dn Maximum?

$$\Rightarrow \quad \frac{dn}{dv} = 0 \qquad \frac{d}{dv}\left(v^2 e^{-Av^2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \bar{v} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

$$\langle v \rangle = \frac{\int v\, f_0(\vec{v})\, d^3v}{\int f_0(\vec{v})\, d^3v} \qquad f_0 \sim e^{-Av^2} \text{ (Maxwell-verteilung)}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{8kT}{m}}$$

wobei: $v = |\vec{v}|$

Somit: $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{4}{\pi}}\, \bar{v}$

$$\lambda = \frac{n \langle v \rangle}{2Z} \sim \frac{1}{n\,\sigma_{tot}}$$

(Bem $\langle v \rangle = \left(\frac{8kT}{\pi m}\right)^{1/2}$, $\bar{v} = \left(\frac{2kT}{m}\right)^{1/2}$

d.h. also $\langle v \rangle$ prop. $\bar{v}$)

λ ist unabhängig von der Temperatur falls σ_{tot} unabhängig von v_{rel}. Zeit zwischen 2 Stössen (Stosszeit) τ

$$\tau = \frac{\lambda}{\langle v \rangle} = \frac{1}{n\,\sigma_{tot}}\left(\frac{\pi m}{8kT}\right)^{1/2} = \frac{1}{n\,\sigma_{tot}\langle v \rangle}$$

<u>Näherung des Stossterms</u>

Approx.: kleine Abweichungen von Max. B.-Verteilung f_0 (f^0)

$$f(\vec{r},\vec{v},t) = f_0 + g$$

<u>$g = 0$</u> : $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{koll} = 0$

<u>erster Ordnung in g</u>

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial t}\right)_{koll} = \int d^3v_2 \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| \underbrace{(f_1' f_2' - f_1 f_2)}_{*}$$

$$(*) = (g_1' f_2^{0\prime} + f_1^{0\prime} g_2' - \underbrace{g_1 f_2^0}_{3\ \text{Term}} - f_1^0 g_2)$$

(term: $g_1' g_2'$ quadratisch, $f_1^{0\prime} f_2^{0\prime}$ → gibt 0 mit $f_1^0 f_2^0$)

Betrachte 3 Term:

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial t}\right)_{koll}^{3.\,\text{Term}} = -g_1(\vec{r},\vec{v}_1,t) \underbrace{\int d^3v_2 \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega\, |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|\, f_2^0}_{\approx\ \sigma_{tot}\cdot n\,\langle v \rangle}$$

(Bem $\int d^3v_2\, |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|\, f_2^0(\vec{r}, \vec{v}_2, t) \simeq \int d^3v_2\, |\vec{v}_2|\, f_2^0$

$\simeq n \langle v \rangle$

n wegen der Normierung $\langle v \rangle = \dfrac{\int d^3v\, v f}{\int d^3v\, f}$ ← n)

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial t}\right)_{koll}^{3.\,Term} \simeq -g_1 \cdot \frac{1}{\tau}$$

τ : Relaxationszeit.

Also macht man den Relaxationszeit Ansatz (Näherung)

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{Stösse} = -\frac{g}{\tau} = -\frac{(f - f_0)}{\tau}$$

Approx. Boltzmann-Gleichung

$$\left(\partial_t + \vec{v}\frac{\partial}{\partial \vec{r}} + \frac{\vec{F}}{m}\frac{\partial}{\partial \vec{v}}\right)(f_0 + g) \simeq -\frac{g}{\tau}$$

Fall 1 i) $\vec{F} = 0$

ii) $f\ (= f_0 + g)$ sei $\vec{r}$ unabhängig

dann $\partial_t f \simeq -\dfrac{(f - f_0)}{\tau}$ $\quad (\partial_t f_0 = 0)$

$$\Rightarrow \quad (f - f_0) = (f - f_0)\Big|_{t=0}\, e^{-t/\tau}$$

(τ : Relaxationszeit).

Fall 2 $\quad f_0$ ist lokale Maxwell Verteilung

(d.h. Koeffizienten hängen von $\vec{r}$ ab, z.B Temperatur hängt von $\vec{r}$ ab).

Dann treten Transporterscheinungen auf (z.B. Wärmeleitung).

g klein:

$$\left(\partial_t + \vec{v}\frac{\partial}{\partial \vec{r}} + \frac{\vec{F}}{m}\frac{\partial}{\partial \vec{v}}\right)(f_0 + \overset{\to 0\,(*)}{g}) \simeq -\frac{g}{\tau}$$

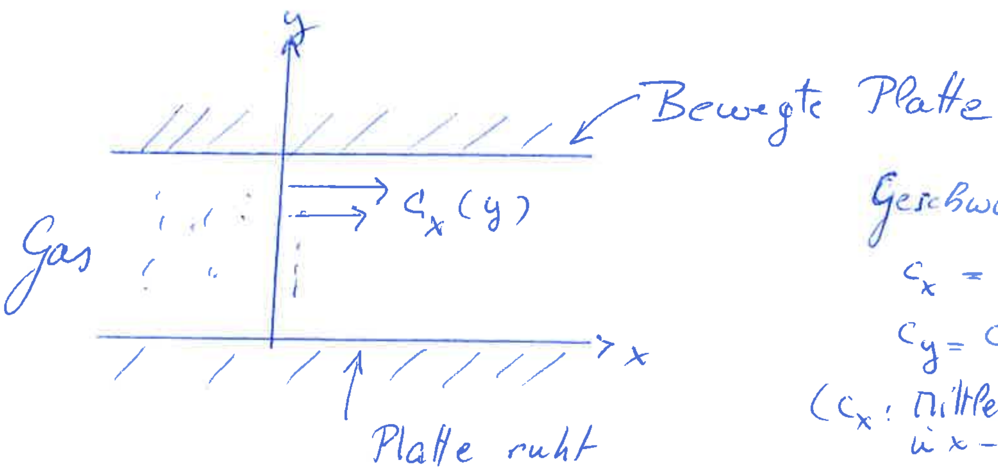
d.h. hier vernachlässigen

Abschätzung $(\vec{F} = 0)$ $\quad \vec{v}\frac{\partial}{\partial \vec{r}} f_0 \simeq \bar{v}\frac{f_0}{L} \simeq \frac{g}{\tau}$

(L: Makroskopische Distanz) $\Rightarrow \frac{g}{f_0} \simeq \frac{\tau \bar{v}}{L} \simeq \frac{\lambda}{L}$

falls $\frac{\lambda}{L} \ll 1$ dann (*) gerechtfertigt.

Transport von Impuls: innere Reibung / Viskosität



Geschwindigkeit:

$c_x = A + By$

$c_y = c_z = 0$

(c_x: mittlere Gesch. des Gases in x-Richtung)

Das Gas setzt der Bewegung der oberen Platte einen Widerstand entgegen. Die dabei in x-Richtung auftretende Kraft pro Flächeneinheit (Flächennormale in y-Richtung) die Schubspannung τ_{yx}, wird infolge der Zähigkeit (innere Reibung) des Gases auf die untere Fläche übertragen. Für sie gilt aus der Strömungslehre bekannte Gesetz

$$\tau_{yx} = +\eta \frac{\partial c_x}{\partial y} \qquad \text{(Newtonscher Ansatz der Zähigkeit)}$$

η : Reibungskoeffizient (oder Viskositätskoeff.)
(gültig solange $\frac{\partial c_x}{\partial y}$ klein ist)

Aufgabe : (i) Herleitung dieser Gleichung
(ii) Bestimmung von η.

τ_{yx} ist gleich dem pro sec durch die Flächeneinheit (senkrecht zur y-Richtung) fliessenden p_x-Impuls.
Für Teilchen mit der Geschwindigkeit in d^3v um $\vec{v}$ ergibt sich eine y-komponente der p_x-Stromdichte

$$v_y\, p_x\, f(\vec{r},\vec{v},t)\, d^3v$$

und für alle Teilchen zusammen: $(p_x = m v_x)$

$$\tau_{yx} = m \int v_y v_x\, f(\vec{r},\vec{v},t)\, d^3v \qquad (*)$$

(Transportierte Grösse : $p_x = m v_x$; Fliessgeschwindigkeit v_y)

$f = f_0 + g$, f_0 trägt nicht bei da $\int v_y v_x f_0\, d^3v = 0$
($v \to -v$ ist Integrand ungerade).

Die Äußeren Kräfte sind $=0$ $(\vec{F}=0)$,
und betrachten eine stationäre Lösung (d.h. $\frac{\partial f}{\partial t}=0$).

Also $\partial_t f \rightarrow \vec{v}\frac{\partial}{\partial \vec{r}} f \approx \vec{v}\frac{\partial}{\partial \vec{r}} f_0$

$$\underbrace{\partial_t f}_{= -\frac{g}{\tau}} \longrightarrow \vec{v}\frac{\partial}{\partial \vec{r}} f_0 \approxeq -\frac{g}{\tau}$$

ist die zu lösende Gleichung.

$$f_0 = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m}{2kT}(\vec{c}(\vec{r})+\vec{v})^2} \quad (\text{"Lokale" Max-Verteilung})$$

$\vec{c} = (c_x(y),0,0)$ d.h. f_0 hängt nur von y ab.

$$v_y\frac{\partial f_0}{\partial y} = f_0\left(-\frac{m}{kT}\right)(c_x+v_x)\frac{\partial c_x}{\partial y} v_y$$

Somit $g = \left[\tau \frac{m}{kT} v_y (c_x+v_x) f_0\right]\frac{\partial c_x}{\partial y}$

$f = f_0 + g$ in $(*)$ einsetzen (wobei nur g Term beiträgt)

$$\tau_{yx} = \underbrace{\left[\frac{m^2\tau}{kT}\int d^3v\, v_y v_x\,(v_y(c_x+v_x))\, f_0\right]}_{\equiv:\eta}\frac{\partial c_x}{\partial y}$$

hängt nicht von $\vec{v}$ ab!

(Term: $\int d^3v\, v_y^2 v_x f_0 = 0$ ungerade)

$$\eta = +\frac{m^2\tau}{kT}\underbrace{\int d^3v\, v_y^2 v_x^2 f_0}_{=\frac{n}{4\left(\frac{m}{2kT}\right)^2}} = \frac{m^2\tau}{kT}\left(\frac{kT}{m}\right)^2 n$$

$$\Longrightarrow \eta = kTn\tau$$

$$\tau \sim t_c \sim \frac{\lambda}{\bar{v}} \sim \frac{1}{n\,\sigma_{tot}\,\bar{v}} \qquad \bar{v} \sim \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

dann $$\eta \sim \frac{\sqrt{mkT}}{\sigma_{tot}}$$

Der Reibungskoeffizient ist von der Dichte n und bei gegebenem T auch von P (Druck) unabhängig.