Übung 1. *[Orts- und Impulsdarstellung]*

Impulserwartungswerte zu Wellenfunktionen $\varphi(\mathbf{p}, t)$ im Impulsraum lassen sich wie folgt

$$\langle \mathbf{p} \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \varphi^*(\mathbf{p}, t)\, \mathbf{p}\, \varphi(\mathbf{p}, t)$$

berechnen.

a) Wie lassen sich diese im Ortsraum bestimmen? Wie sieht der Impulsoperator im Ortsraum aus?

Ähnlich sind die Ortserwartungswerte zu Wellenfunktionen $\psi(\mathbf{x}, t)$ im Ortsraum gegeben als

$$\langle \mathbf{x} \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3 x\, \psi^*(\mathbf{x}, t)\, \mathbf{x}\, \psi(\mathbf{x}, t)\,.$$

b) Wie lassen sich diese im Impulsraum bestimmen? Wie sieht der Ortsoperator im Impulsraum aus?

Übung 2. *[Gauss'sches Wellenpaket]*

Eine Wellenfunktion sei gegeben durch

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi\hbar)^3}\, \phi(\mathbf{p})\, \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} - Et)}\,.$$

Wir betrachten im folgenden ein Gauss'sches Wellenpaket in einer Dimension, bei dem $\phi(p)$ gegeben ist durch

$$\phi(p) = A\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{\hbar^2}(p-p_0)^2 d^2}. \tag{1}$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichte im Impulsraum ist definiert durch

$$w(p, t) = \frac{1}{2\pi\hbar} |\phi(p, t)|^2.$$

a) Bestimmen Sie die Konstante A aus der Normierungsbedingung $\int \mathrm{d}p\, w(p, t) = 1$.

Zeige dann, dass für das obige, eindimensionale, Wellenpaket gilt:

b) $w(p, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{d}{\hbar} \exp\left(-2(p - p_0)^2 \frac{d^2}{\hbar^2}\right)$

c) $\langle p \rangle = p_0$

d) $\Delta p = \frac{\hbar}{2d}$

Übung 3. *[Rechnen mit Kommutatoren]*

Seien A, B und C lineare Operatoren. Der Kommutator $[A, B] = AB - BA$ ist linear in A und B und antisymmetrisch, d.h. $[B, A] = -[A, B]$.

a) Zeige, dass der Kommutator die Produktregeln

$$[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C,$$

$$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$$

erfüllt.

b) Zeige, dass der Kommutator die Jacobi-Identität

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$$

erfüllt.