Thermodynamik
Serie 8

HS 2020
Prof. P. Jetzer

M. Haney, S. Tiwari, M. Ebersold
https://www.physik.uzh.ch/de/lehre/PHY341/

Ausgeteilt am: 10.11.20
Abzugeben bis: 17.11.20

---

1. Ausdehnungskoeffizient am absoluten Nullpunkt [4 P]

Der isobare thermische Ausdehnungskoeffizient ist definiert als

$$\beta = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p . \tag{1}$$

Wie in der Vorlesung gezeigt wurde, verschwindet die Wärmekapazität am absoluten Nullpunkt:

$$\lim_{T\to 0} C_p = 0. \tag{2}$$

Dies legt den auch experimentell bestätigten Ansatz nahe:

$$C_p = T^x(a + bT + cT^2 + ...) \qquad x > 0; \quad a = a(p) \neq 0; \quad b = b(p); \quad c = c(p). \tag{3}$$

a) Zeige, dass das Verhältnis

$$\frac{V\beta}{C_p} \tag{4}$$

für $T \to 0$ gegen eine endliche Konstante strebt.

b) Aus dem 1. Hauptsatz lässt sich folgende Gleichung herleiten:

$$TdS = C_p dT - TV\beta dp. \tag{5}$$

Zeige, dass

$$\lim_{T\to 0}\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S = 0. \tag{6}$$

Was folgt daraus für die Erreichbarkeit des absoluten Nullpunktes der Temperaturskala?

2. Boltzmann $\boldsymbol{H}$-Funktion im Gleichgewicht [9 P]

Die Maxwell-Boltzmann Verteilung ist die stationäre Lösung der Boltzmann Transportgleichung in der Abwesenheit eines äusseren Treibers ($\boldsymbol{F} = 0$):

$$f_0 = n \left(\frac{1}{2\pi m k_\mathrm{B} T} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_0)^2}{2 m k_\mathrm{B} T} \right) . \tag{7}$$

a) **Gauss'sche Integrale** (mathematische Vorbereitung):

i. Zeige, dass die Lösung des Gauss'schen Integrals gegeben ist durch

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, e^{\frac{-x^2}{2}} = \sqrt{2\pi}. \tag{8}$$

Tipp: Vergleiche die Integration in zwei Dimensionen in kartesischen Koordinaten mit derjenigen in Polarkoordinaten:

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, e^{-(x^2+y^2)/c^2} = \int_0^{\infty} \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta r e^{-r^2/c^2} \tag{9}$$

ii. Berechne anschliessend die allgemeine Lösung für Integrale der Form

$$\int_0^{\infty} \mathrm{d}x \; x^{2n} e^{-\alpha x^2} \qquad \text{oder} \qquad \textstyle\int_0^{\infty} \mathrm{d}x \; x^{2n+1} e^{-\alpha x^2} . \tag{10}$$

Tipp: Man leite nach α ab, bzw. substituiere $y = x^2$.

b) **Resultierende Eigenschaften**:
Berechne nun die mittleren Werte für Impuls, Energie und Geschwindigkeit (setze $\boldsymbol{p}_0 = \boldsymbol{0}$ bei $\langle \varepsilon \rangle$ und $\bar{v}$):

$$\langle \boldsymbol{p} \rangle \stackrel{!}{=} \boldsymbol{p}_0 \, , \qquad \langle \varepsilon \rangle = \left\langle \frac{p^2}{2m} \right\rangle \stackrel{!}{=} \frac{3}{2} k_\mathrm{B} T \, , \qquad \bar{v} = \left\langle \frac{|p|}{m} \right\rangle \stackrel{!}{=} \sqrt{\frac{8 k_\mathrm{B} T}{\pi m}} \, .$$

c) **Boltzmann $\boldsymbol{H}$-Funktion im Gleichgewicht**:
Die Boltzmann H-Funktion ist definiert als

$$H(t) = \int \mathrm{d}^3 p \; f \ln f \, .$$

Berechne den Wert dieser Funktion im Gleichgewicht, also $H_0 = \int \mathrm{d}^3 p \; f_0 \ln f_0$.

d) **Entropie aus der Boltzmann H-Funktion**:
Durch Multiplikation mit $-k_\mathrm{B} V$ erhält man aus der H-Funktion die Entropie S. Zeige, dass die auf diesem Weg definierte Entropie $S = -k_\mathrm{B} V H_0$ extensiv ist.