Übung 1. ***[Schwarzsche Ungleichung]***

Zeige, dass für das Skalarprodukt zweier Wellenfunktionen ϕ und ψ folgende Ungleichung gilt

$$|\,(\phi,\psi)\,|^2 \leq (\phi,\phi)\,(\psi,\psi)\,.$$

Lösung.

(a) Sei $\phi = 0$: Ungleichung offensichtlich erfüllt.

(b) Sei $\phi \neq 0$. Zerlege ψ in einen Anteil parallel und senkrecht zu ϕ, also $\psi = z\phi + \chi$, mit $z \in \mathbb{C}$ und $(\phi,\chi) = 0$. Daraus folgt $(\phi,\psi) = z\,(\phi,\phi)$, also $z = \frac{(\phi,\psi)}{(\phi,\phi)}$.
Es ist ausserdem

$$(\psi,\psi) = (z\phi+\chi, z\phi+\chi) = zz^*\,(\phi,\phi) + (\chi,\chi) \geq zz^*\,(\phi,\phi)\,.$$

Setzt man nun z ein, so ergibt sich

$$(\psi,\psi) \geq \frac{|\,(\phi,\psi)\,|^2}{(\phi,\phi)}.$$

Das Gleichheitszeichen gilt nur für $\psi = z\phi$.

Übung 2. ***[Energieeigenwerte]***

Betrachte das Zweizustandssystem mit dem Hamiltonoperator

$$H = a\left(|1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2| + |1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|\right)\,,$$

wobei a die Dimension einer Energie hat. Berechne die Energieeigenwerte und die dazugehörigen normierten Eigenzustände, in der Basis $|1\rangle$ & $|2\rangle$.

Lösung. Für die Matrixdarstellung des Hamiltonoperators H in der Basis $|1\rangle$ & $|2\rangle$ erhalten wir

$$H = \begin{pmatrix} \langle 1|\,H\,|1\rangle & \langle 1|\,H\,|2\rangle \\ \langle 2|\,H\,|1\rangle & \langle 2|\,H\,|2\rangle \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die Nullstellen λ_i des charakteristischen Polynoms $\det(H - \lambda 1)$ sind die Eigenwerte. Die dazugehörigen Eigenzustände berechnen wir aus $H\,|v_i\rangle = \lambda_i\,|v_i\rangle$.

$$\lambda_\pm = \pm\sqrt{2}a\,, \quad |v_\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(2\pm\sqrt{2})}}\begin{pmatrix} 1\pm\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2(2\pm\sqrt{2})}}\left[\left(1\pm\sqrt{2}\right)|1\rangle + |2\rangle\right]\,.$$

Übung 3. ***[Kompatible Operatoren]***

Ein dreidimensionaler Ketraum sei durch die Orthonormalbasis, $|1\rangle$, $|2\rangle$ und $|3\rangle$, aufgespannt. Die Operatoren A und B wirken folgendermaßen auf die Basisvektoren ($a, b \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned} A\,|1\rangle &= a\,|1\rangle\,, & B\,|1\rangle &= b\,|1\rangle\,, \\ A\,|2\rangle &= -a\,|2\rangle\,, & B\,|2\rangle &= ib\,|3\rangle\,, \\ A\,|3\rangle &= -a\,|3\rangle\,, & B\,|3\rangle &= -ib\,|2\rangle\,. \end{aligned} \tag{1}$$

(a) Das Spektrum des Operators A ist offensichtlich degeneriert. Hat Operator B auch ein degeneriertes Spektrum?

(b) Zeige, dass die Operatoren A und B kommutieren.

(c) Konstruiere eine neue orthonormale Basis, bei welcher die Basisvektoren die Eigenvektoren zu beide A und B sind. Finde die Eigenwerten von A und B für alle drei Eigenvektoren. Definieren die Eigenwerte jeden Eigenvektor vollständig?

Lösung.

(a) Die Operatoren A und B können wir durch Matrizen in der Basis $\{|1\rangle\,, |2\rangle\,, |3\rangle\}$ darstellen:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix}\,, \quad B = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -ib \\ 0 & ib & 0 \end{pmatrix}\,. \tag{L.1}$$

Das charakteristische Polynom von B lautet $(b-\lambda)(\lambda^2 - b^2)$ und die Eigenwerte sind demnach $\lambda = \pm b$. Die Antwort ist "Ja", weil der Eigenwert $+b$ zweifach degeneriert ist.

(b) Die Komutativität der Operatoren A und B lässt sich leicht ausdrücklich überprüfen, indem wir die zugeordneten Matrizen multiziplieren.

(c) Wir berechnen die normierten Eigenvektoren von B

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\,, \quad \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}\,, \quad \vec{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}\,, \tag{L.2}$$

wobei die $\vec{v}_{1,2}$ den Eigenraum von $\lambda = +b$ aufspannen. In Dirac-Notation schreiben wir die Eigenvektoren als

$$|{+}{+}\rangle := |1\rangle\,, \quad |{-}{+}\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}(|2\rangle + i\,|3\rangle)\,, \quad |{-}{-}\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}(|2\rangle - i\,|3\rangle)\,. \tag{L.3}$$

Diese sind *gleichzeitig* Eigenvektoren von A und B, weil $|2\rangle$ und $|3\rangle$ die gleichen Eigenwerte bezüglich A haben. Das Eigenwertproblem in der neuen Basis lautet

$$A\,|{+}{+}\rangle = a\,|{+}{+}\rangle\,, \quad A\,|{-}{+}\rangle = -a\,|{-}{+}\rangle\,, \quad A\,|{-}{-}\rangle = -a\,|{-}{-}\rangle \tag{L.4}$$

$$B\,|{+}{+}\rangle = b\,|{+}{+}\rangle\,, \quad B\,|{-}{+}\rangle = b\,|{-}{+}\rangle\,, \quad B\,|{-}{-}\rangle = -b\,|{-}{-}\rangle\,, \tag{L.5}$$

oder in Matrixdarstellung,

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix}\,, \quad B = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} \tag{L.6}$$

Das Spektrum jedes Operators ist degeneriert, aber die Angabe *beider* Eigenwerte (i.e. $\pm a$ und $\pm b$) charakterisiert eindeutig jeden Eigenvektor. Die Darstellungsmatrix, die beschreibt die Abbildung zwischen $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ und $\{|{+}{+}\rangle, |{-}{+}\rangle, |{-}{-}\rangle\}$, ist gegeben durch

$$U = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & i\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & -i\sqrt{2} \end{pmatrix}. \tag{L.7}$$

Die Matrix entspricht einer Drehung im Eigenraum von $\lambda = -a$ und ist, wie erwartet, offensichtlich unitär.

Übung 4. ***[Eigenwerte von Operatoren]***

Ein Operator A, der die Observable α beschreibt, habe zwei normierte Eigenfunktionen Φ_1 und Φ_2 mit den Eigenwerten a_1 und a_2. Ein anderer Operator B, der die Observable β beschreibt, habe die normierte Eigenfunktionen χ_1 und χ_2 mit den Eigenwerten b_1 und b_2. Die Eigenfunktionen hängen über die Beziehung

$$\Phi_1 = \frac{1}{\sqrt{13}}(2\chi_1 + 3\chi_2), \quad \Phi_2 = \frac{1}{\sqrt{13}}(3\chi_1 - 2\chi_2)$$

zusammen. Die Observable α wird gemessen und wir erhalten den Wert a_1. Nun werde die Observable β gemessen, und darauffolgend wieder die Observable α. Zeige, dass die Wahrscheinlichkeit, den Wert a_1 ein wiederholtes Mal zu messen, gerade $\frac{97}{169}$ ist.

Lösung. Nach einer Messung von α, die das Ergebnis a_1 liefert, ist das System im Eigenzustand $\psi = \Phi_1$. Wenn nun β gemessen wird, ist die Wahrscheinlichkeit, dass man die Werte b_1 bzw. b_2 erhält durch die Entwicklung von Φ_1 in Terme von χ_1 und χ_2 gegeben.
Wenn $\Phi_1 = c_1\chi_1 + c_2\chi_2$, dann ist die Wahrscheinlichkeit bei einer Messung von β den Wert b_1 zu messen genau $|c_1|^2$ und $|c_2|^2$ für den Wert b_2. Nehmen wir an, das Ergebnis der Messung von β sei b_1. Dann ist das System nun im Zustand χ_1, und die Wahrscheinlichkeit, bei erneuter Messung von α den Wert a_1 bzw. a_2 zu erhalten, ist durch die Zerlegung von χ_1 in ϕ_1 und ϕ_2 gegeben. Man erhält

$$\chi_1 = c_1\Phi_1 + c_2\Phi_2, \qquad \chi_2 = c_2\Phi_1 - c_1\Phi_2.$$

Wenn dass System also im Zustand χ_1 ist, ist die Wahrscheinlichkeit, a_1 zu messen, gerade $|c_1|^2$. Die Wahrscheinlichkeit, erst b_1 und dann a_1 zu messen ist also c_1^4. Die Wahrscheinlichkeit, erst b_2 und dann a_1 zu messen ist c_2^4. Die Gesamtwahrscheinlichkeit ist also gegeben durch

$$c_1^4 + c_2^4 = \frac{97}{169}.$$