**Übung 1.** *[Ehrenfest-Theorem]*

In der Vorlesung wurde für den Erwartungswert eines hermiteschen Operators $A$ die Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt}\langle A\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle [H,A]\rangle + \left\langle \frac{\partial A}{\partial t}\right\rangle \tag{1}$$

hergeleitet, wobei $H(\vec{x},\vec{p}) = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{x})$ der Hamilton-Operator mit einem Potential $V$ ist. In dieser Aufgabe werden wir zeigen, dass der Erwartungswert des Ortsoperators die klassische Newton'sche Bewegungsgleichung erfüllt.

a) Aus dem Resultat der Aufgabe 3 von Serie 2 (oder direkt), zeige

$$[\vec{x},\vec{p}^n] = ni\hbar\vec{p}^{n-1} \tag{2}$$
$$[\vec{p}, f(\vec{x})] = -i\hbar\vec{\nabla} f(\vec{x}) \tag{3}$$

für eine natürliche Zahl $n$ und eine differenzierbare Funktion $f$.

b) Aus Gleichung (1) und den Resultaten von Teilaufgabe a), zeige

$$m\frac{d^2}{dt^2}\langle\vec{x}\rangle = \left\langle \vec{F}(\vec{x})\right\rangle = -\left\langle \vec{\nabla}V(\vec{x})\right\rangle, \tag{4}$$

wobei $\vec{F}(\vec{x})$ die Kraft aus dem Potential $V(\vec{x})$ ist.

**Übung 2.** *[Zeitentwicklung der Wellenfunktion]*

Seien $\psi_a(x)$ und $\psi_b(x)$ zwei orthonormale Lösungen der zeitunabhängigen Schrödingergleichung für ein gegebenes Potential mit den Energieeigenwerten $E_a$ und $E_b$. Nimm an, dass das System zum Zeitpunkt $t = 0$ sich im Zustand

$$\psi(x, t = 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_a(x) + \psi_b(x)\right)$$

befindet. Finde die Wahrscheinlichkeitsdichte zu einem späteren Zeitpunkt $t$. Welche Grössenordnung hat die Oszillationszeit des Interferenzterms, falls die Energien $E_a$ und $E_b$ zwei Energieniveaus in der Lyman-Serie des Wasserstoffatoms entsprechen ?

**Übung 3.** *[Teilchen im eindimensionalen Kastenpotential]*

Gegeben sei ein Teilchen der Masse $m$ in einem Kastenpotential der Form

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & \text{für} \quad |x| < a \\ 0 & \text{für} \quad |x| > a \end{cases} \tag{5}$$

mit $V_0 > 0$. Gesucht sind die Energien und Wellenfunktionen der gebundenen Zustände.

a) Berechne die Eigenfunktion innerhalb und ausserhalb des Kastens zunächst getrennt, und setze dann diese Lösung bei $x = \pm a$ stetig differenzierbar aneinander.
Unterscheide die Lösungen nach ihrer Parität.

b) Man erhält eine transzendente Gleichung für die Energie $E$ in Abhängigkeit von der Potentialtiefe $V_0$. Löse diese Gleichung graphisch. Wie viele gebundenen Zustände gibt es, und welche Energie haben sie wenn $V_0 \gg E$?

c) Was passiert im Fall $a \to 0$ mit $aV_0 = \alpha = const$?

**Übung 4.** *[Reflektionsloses Potential]*

Betrachte das unten abgebildete eindimensionale Potential

$$V(x) = -\frac{\hbar^2 a^2}{m} \text{sech}^2(ax) \tag{6}$$

mit der positiven Konstante $a > 0$.

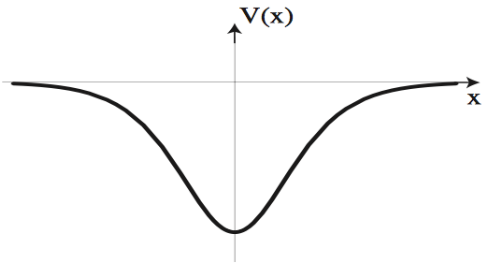


Abbildung 1: Form des Potentials für Aufgabe 4.

a) Zeige, dass der (Grund)zustand dieses Potentials mit der Wellenfunktion

$$\psi_0(x) = A\,\text{sech}(ax) \tag{7}$$

beschrieben werden kann. Normiere $\psi_0$ und finde seine Energie.

b) Zeige, dass die Wellenfunktion

$$\psi_k(x) = A\left(\frac{ik - a\tanh(ax)}{ik + a}\right) e^{ikx} \tag{8}$$

mit $k = \sqrt{2mE/\hbar^2}$ eine Lösung der Schrödinger-Gleichung für beliebige energie $E > 0$ ist.

c) Berechne Reflexions- und Transmissionskoeffizienten für diese Wellenfunktion in den Limiten $x \to \pm\infty$ und zeige, dass diese Lösung eine von links einfallende, reflektionslose ebene Welle beschreibt.